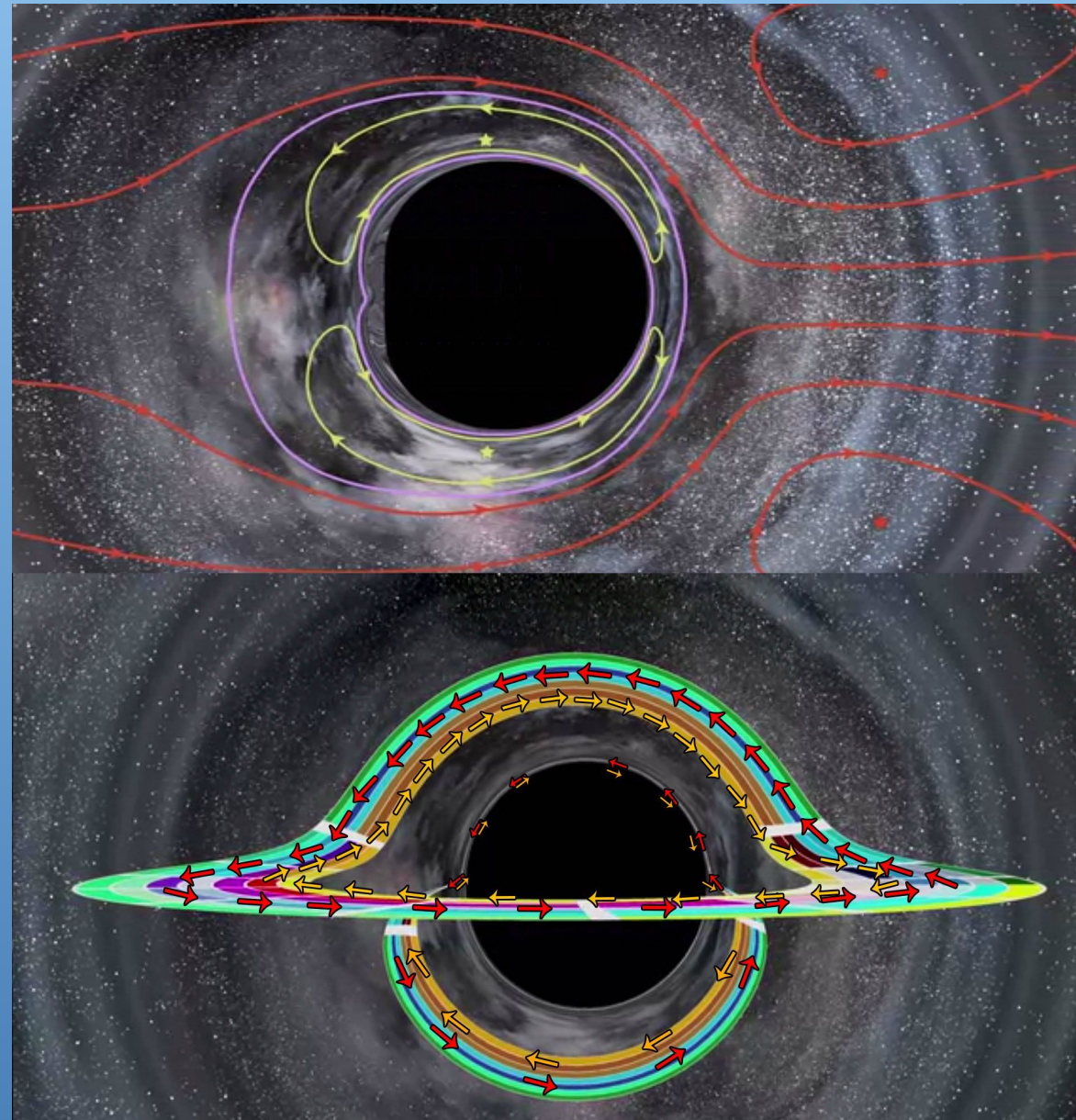


La géométrie de l'espace-temps.



Stephane Collion

Pint of Science ICNA (avril 2024)

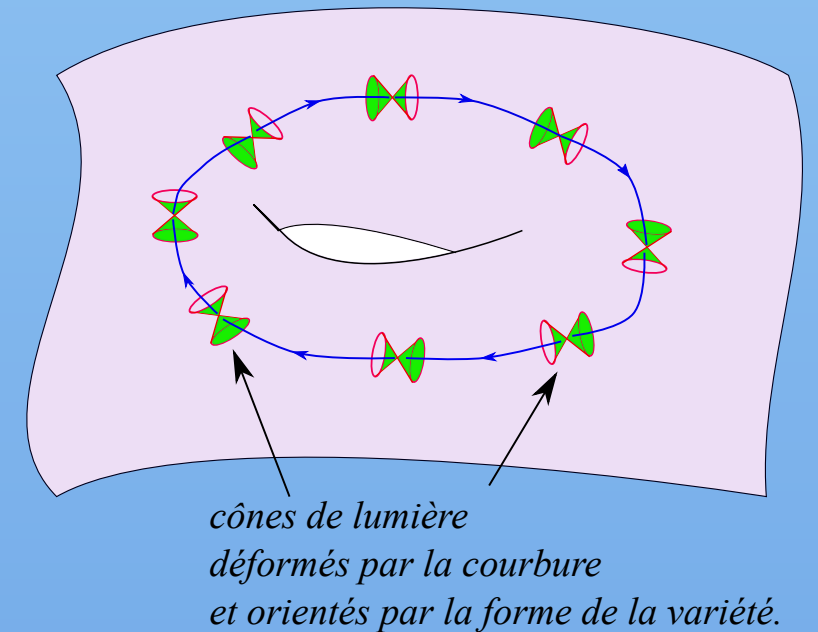
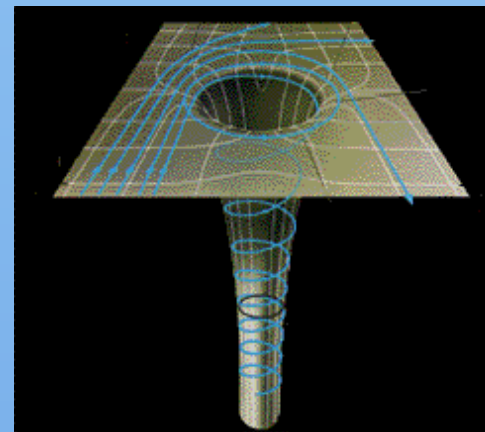
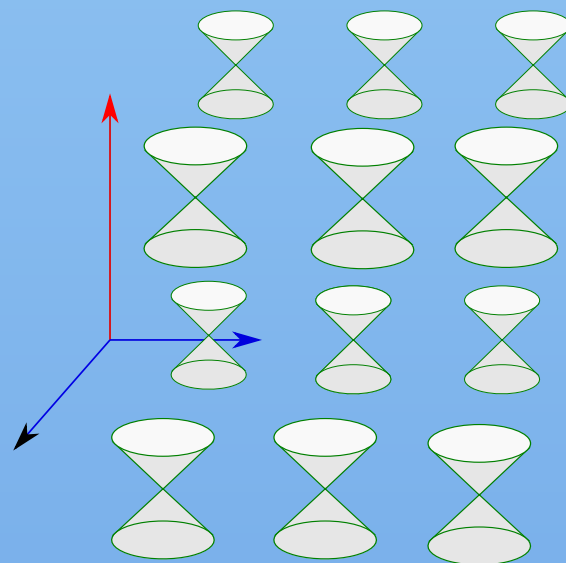
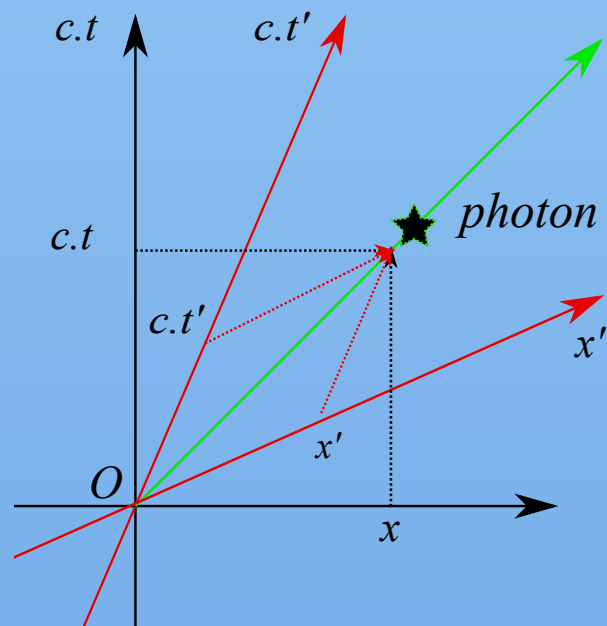
Kafemath (janvier 2024/juin 2025)

stephanecollion@mac.com

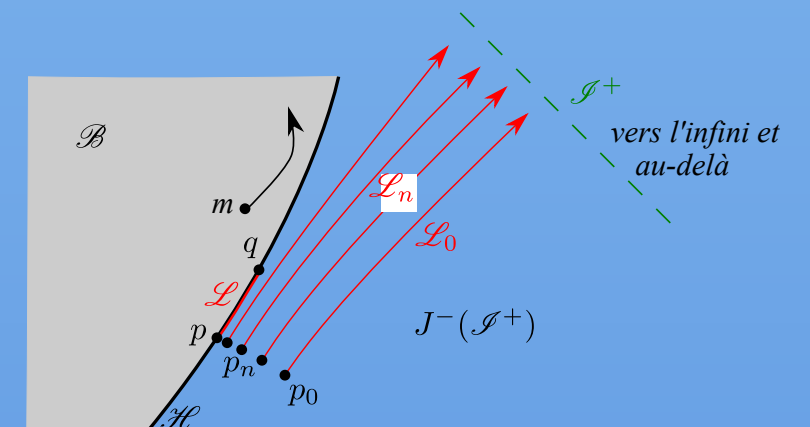
19 juin 2025 v2

Introduction, but de l'exposé :

La gravitation, c'est de la géométrie !



- Proposer un regard de mathématicien sur une splendide théorie physique.
- La relativité générale est en effet une théorie fondamentalement géométrique.
- Elle s'appuie sur une branche importante des mathématiques, la géométrie Riemannienne, et elle n'existerait pas sans elle.
- Cacher, comme c'est systématiquement le cas dans les ouvrages de vulgarisation, les aspects mathématiques de la relativité, c'est en nier la nature profonde, et c'est passer à côté de certains de ses aspects les plus merveilleux !
- Nous verrons en effet que les phénomènes physiques spectaculaires de la relativité ne sont que l'expression de la géométrie de l'espace-temps.



Levons tout de suite une ambiguïté :

Vladimir Arnold :

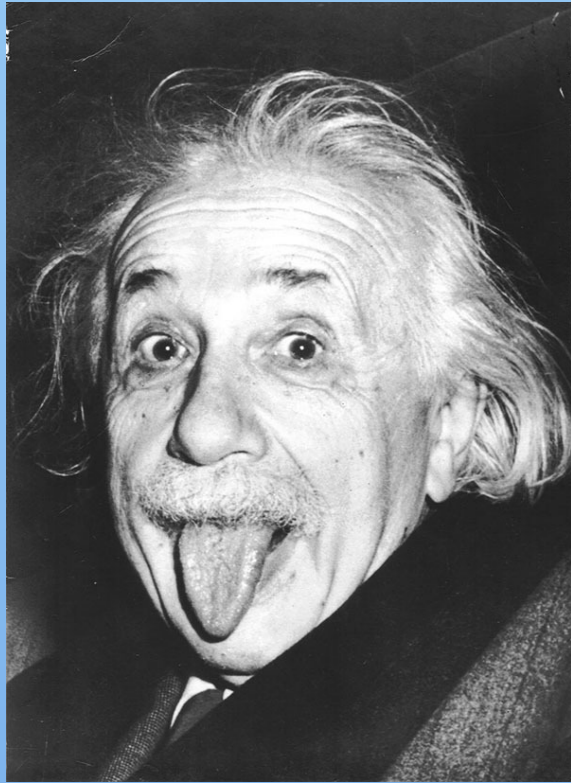
« Les mathématiques sont la branche de la physique où les expériences ne coûtent pas cher. »

Faux !

SC :

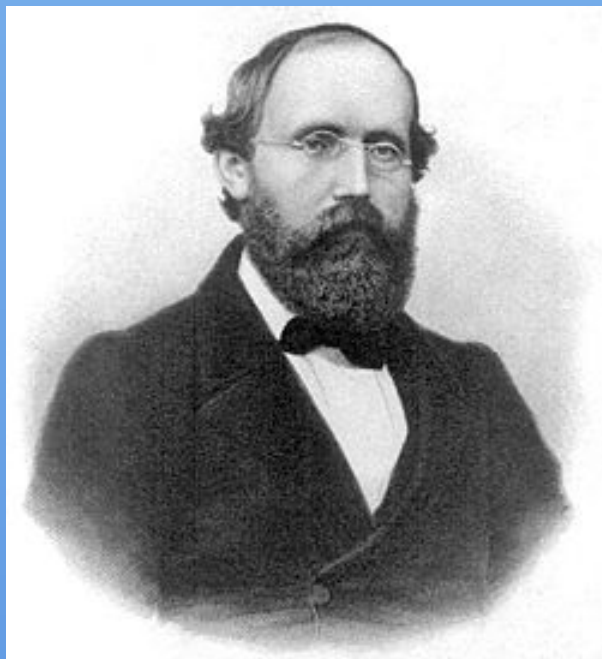
« La physique est la branche des mathématiques où le matériel coûte cher. »

Les deux personnages principaux...



**Albert Einstein. 1879-1955.
Physicien,
Mathématicien...**

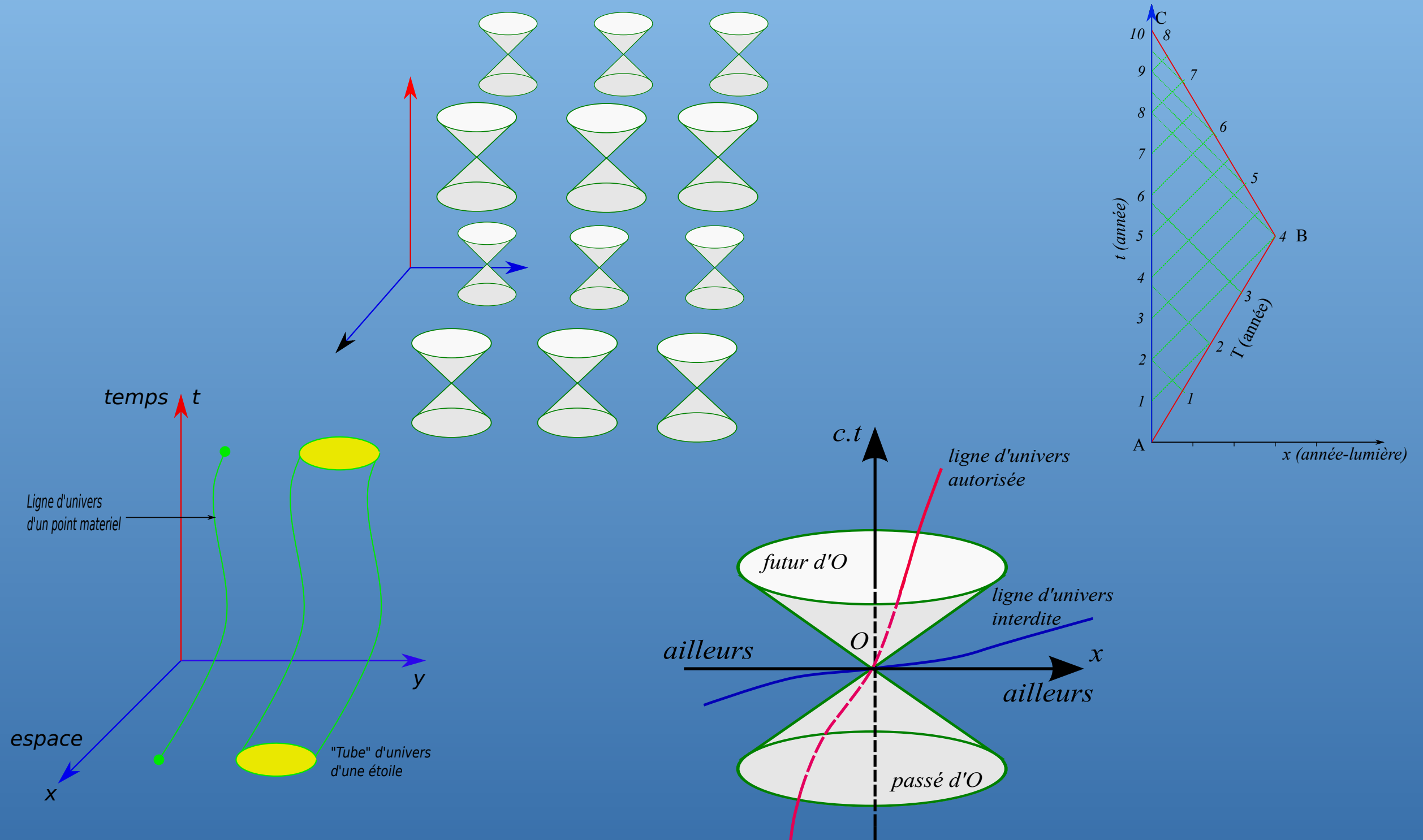
Il a fallu à Einstein une intuition et un sens physique exceptionnels pour mettre au point sa théorie de la relativité générale. Mais cette théorie n'existerait pas sans les mathématiques très belles et pures que constituent la géométrie Riemannienne, et qu'Einstein a su merveilleusement utiliser.



Bernhard Riemann, 1826-1866.
Sa célèbre soutenance d'habilitation, en 1854, intitulé « Sur les hypothèses sous-jacentes à la géométrie » jette les bases de la géométrie différentielle. Il y introduit la bonne façon d'étendre à n dimensions les résultats de Gauss sur les surfaces. Cette soutenance a profondément changé la conception de la notion de géométrie.

Première partie : La relativité restreinte

L'espace-temps tissé par la lumière...



Motivation historique : la vitesse de la lumière.

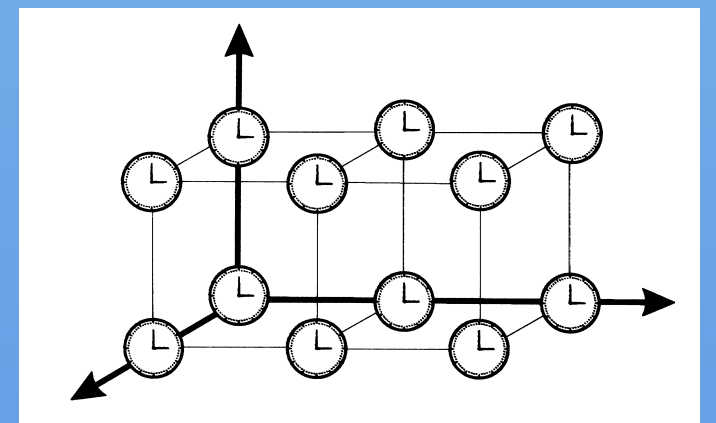
- La vitesse de la lumière (dans le vide) est la même pour tous les observateurs galiléens, et est indépendante du mouvement de la source.
- La vitesse de la lumière est une vitesse limite, qu'aucun objet ou signal physique ne peut dépasser.
- Cela oblige à remettre en cause les principes de mesures de temps et de distances de Newton : la loi d'addition des vitesses ne fonctionne plus.

Nous allons parler de *mécanique*, c'est à dire de la modélisation du mouvement des objets physiques et de la lumière, ainsi que des mesures de distances et de durées qui y sont associées.

Nous appellerons cela de la ***Chronogéométrie***.

Le point de départ de ce qui nous intéresse est que pour cela, on doit choisir *un cadre géométrique*.

Commençons par quelques rappels de notion de base et quelques définitions importantes...

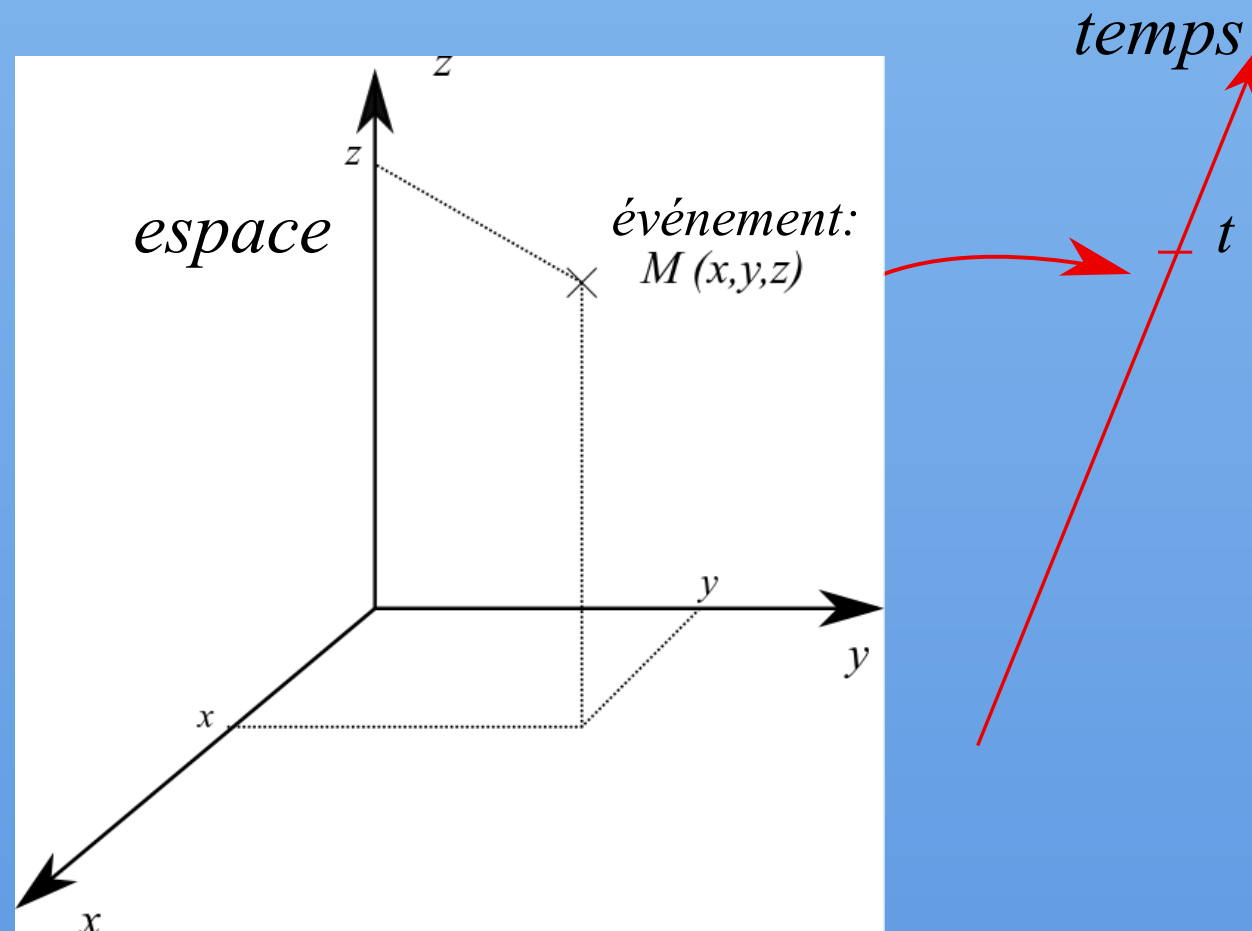


De l'espace et du temps à l'espace-temps.

- Observateur : être (abstrait?!) muni de moyens de mesurer des distances et des durées, qu'il rapporte à un cadre géométrique appelé référentiel.
- Un observateur note des événements : un événement physique est un point du référentiel, défini par les données du lieu où il se situe et de la date à laquelle il se produit.

Espace et temps de Newton :

Pour Newton, le temps et l'espace étaient absolus, les mêmes pour tous les observateurs.



- On associe à un référentiel un repère qui fournit les coordonnées des événements.
- Chez Newton, il y a un repère pour les positions spatiales, et un repère pour les dates. Un référentiel en deux parties, donc...

L'espace-temps :

Mais finalement...

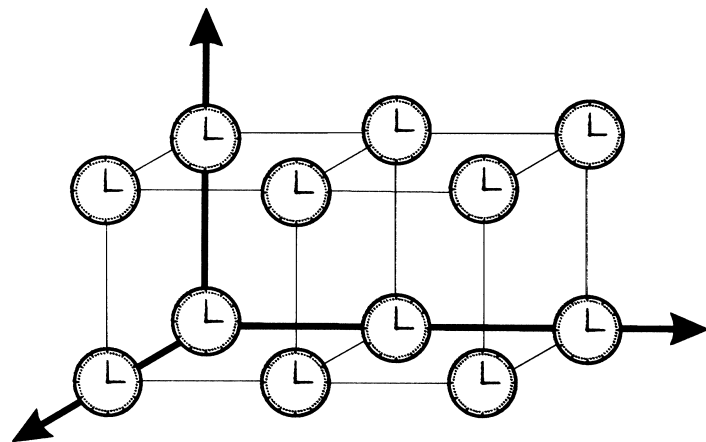
Un événement (physique) est caractérisé par l'endroit où il se produit, et le moment où il se produit. On peut donc réunir ces données dans un seul espace géométrique : l'espace-temps !

(Newton aurait pu le faire...)

Idée clef de l'exposé : Choisir le bon espace géométrique :

Le choix d'un espace géométrique pour modéliser les phénomènes physiques doit être vu comme un *postulat*. C'est Poincaré et Minkowski qui comprirent que l'espace-temps était le meilleur espace géométrique pour faire de la relativité, car il rendait les démonstrations plus simples.

Einstein utilisa initialement un espace à 3 dimensions muni en chaque point d'une horloge : les démonstrations étaient beaucoup plus complexes et moins naturelles...



L'espace-temps :

4 coordonnées (3 d'espace, 1 de temps),
donc 4 dimensions.

Comme on ne sait pas dessiner ça, dans les dessins, on supprime une (ou parfois deux) dimension spatiale.

Ça donne un diagramme d'espace-temps.

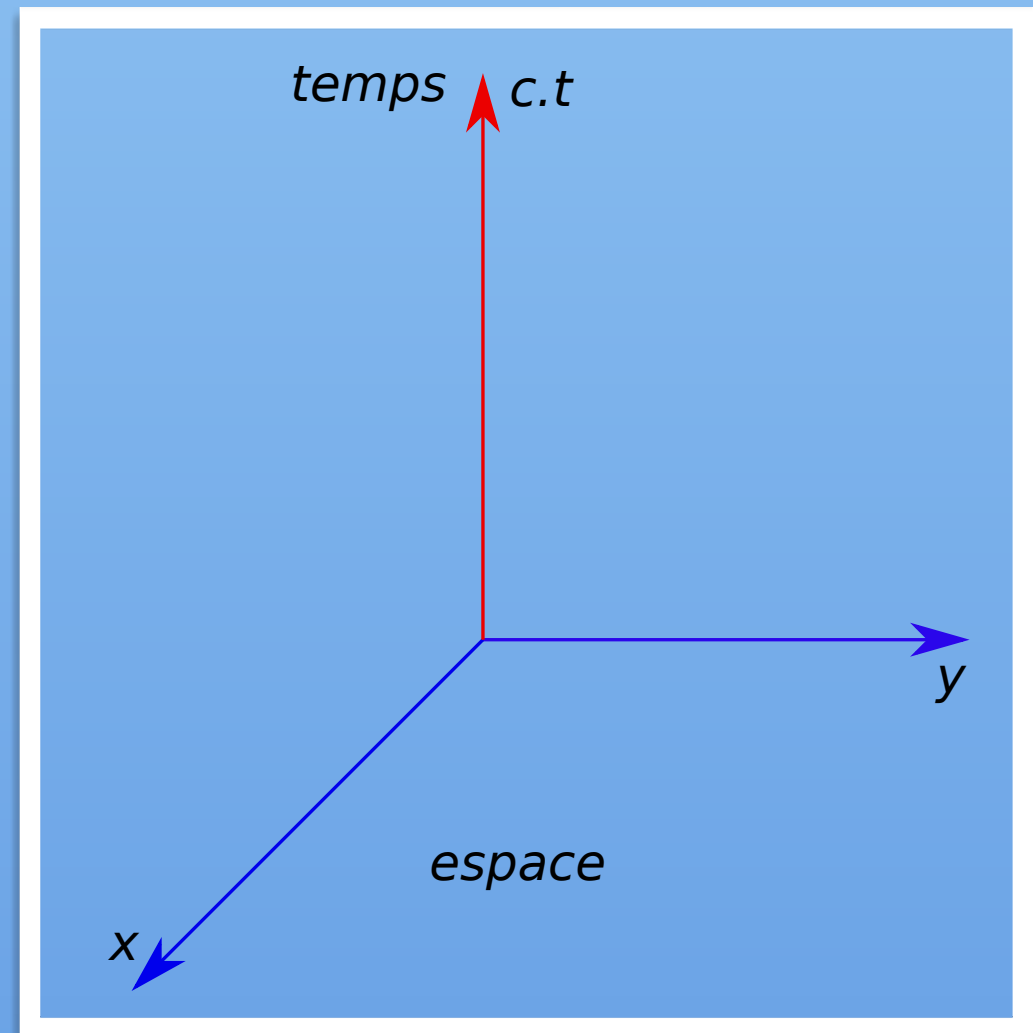
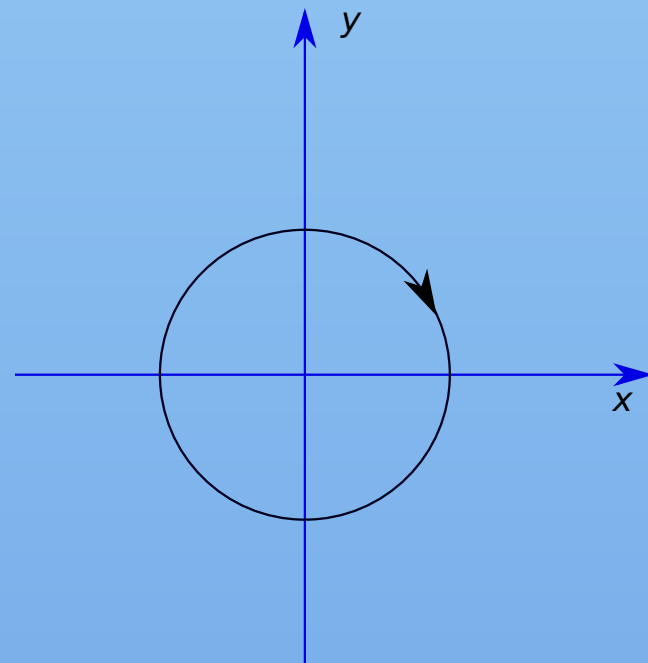
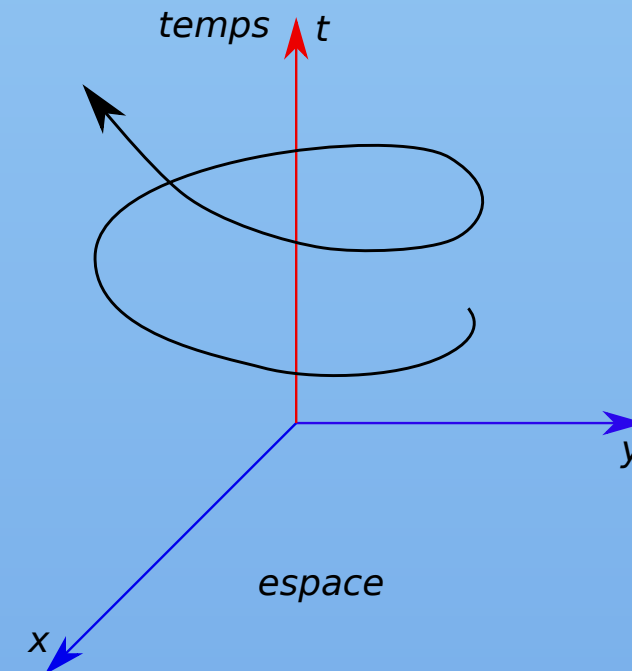


Diagramme d'espace-temps dans lequel on a supprimé une coordonnées d'espace. La lettre c apparaissant dans l'expression c.t sur l'axe vertical de la coordonnée de temps désigne la vitesse de la lumière. Elle sert de facteur de conversion d'unités entre les durées et les longueurs, pour pouvoir les ajouter ou soustraire dans les formules que nous verrons. Mais les théoriciens, et les mathématiciens, ont pour habitude de faire comme si les unités étaient choisies pour que $c = 1$, de sorte que ce facteur disparaît des formules...

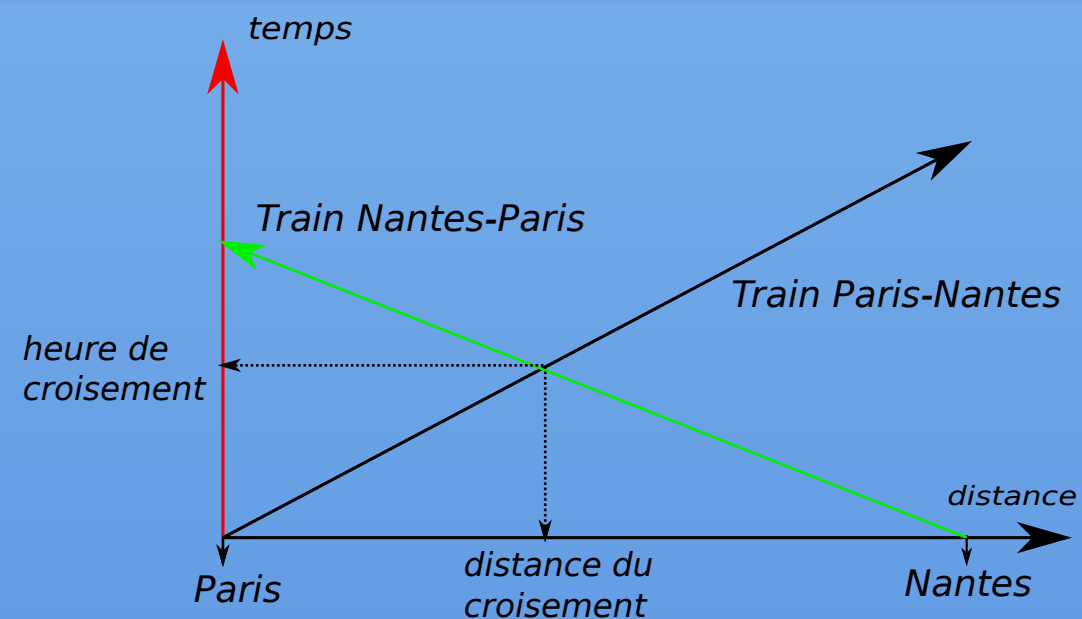
A gauche, un mouvement circulaire représenté dans l'espace classique, sans indication de temps.



A droite, sa visualisation dans un diagramme d'espace-temps, l'axe des temps étant vertical.



Démystifions : Un diagramme chemin-de-fer est un diagramme d'espace-temps !
(à 2 dimensions, x et t)



Lignes d'univers :

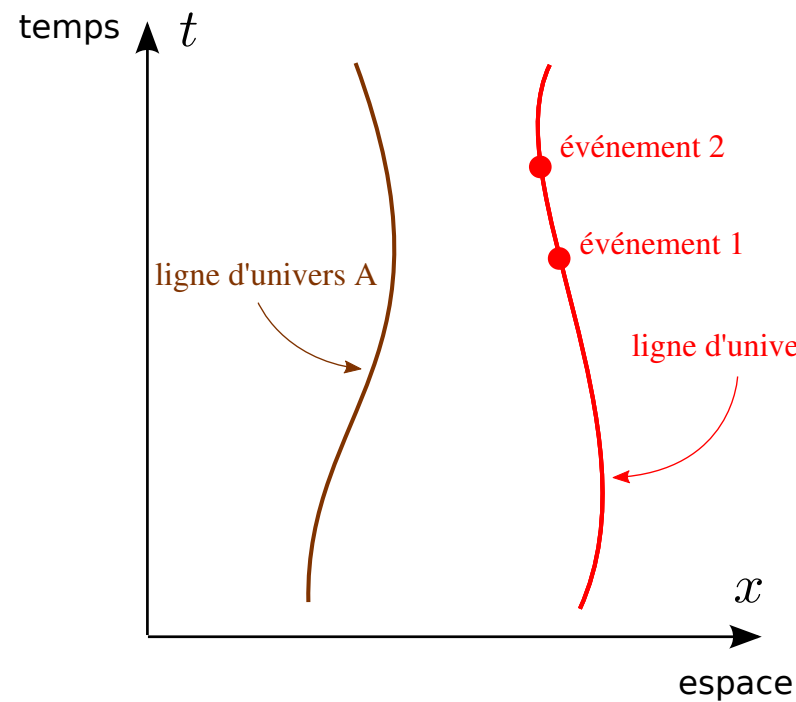
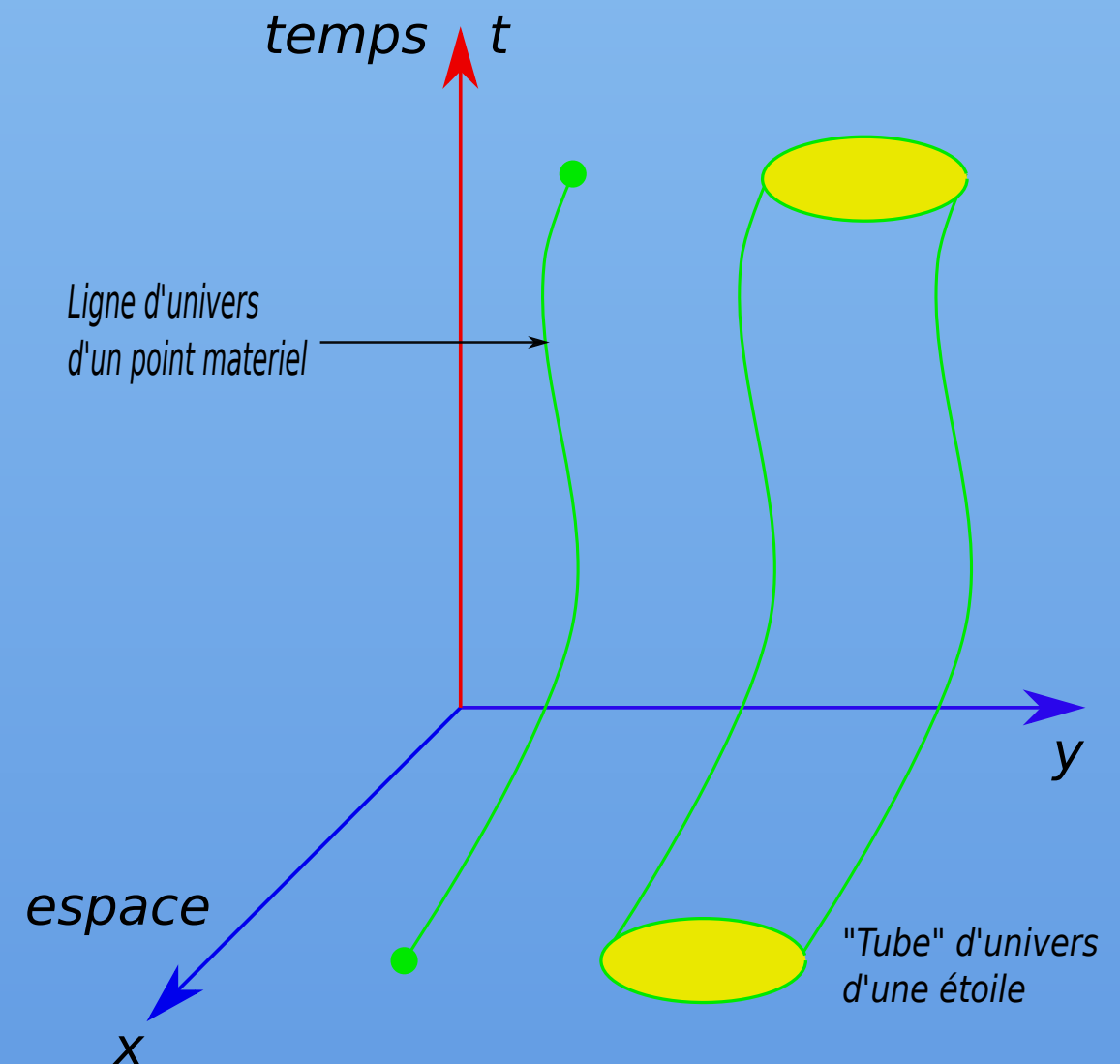


Diagramme d'espace-temps

- Dans l'espace :
→ une particule est représentée par un **point**
- Dans l'espace-temps :
→ une particule est représentée par une **ligne continue**, appelée **ligne d'univers**
→ un **événement** correspond à un point

C'est l'union mathématique de l'espace et du temps.



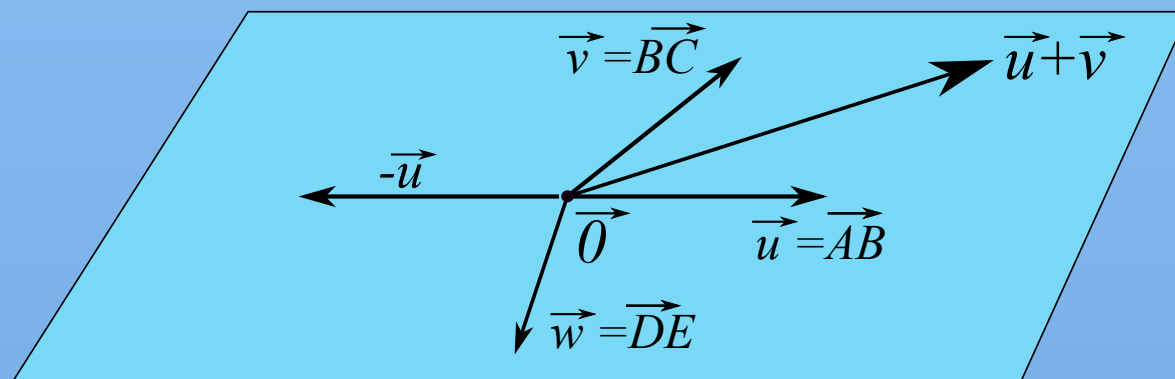
A gauche : ligne d'univers d'un "point matériel", qui représente un "petit" objet.

A droite : l'histoire d'un "gros" objet, comme une étoile est représentée par un "tube" d'univers, constitué de l'ensemble de toutes les lignes d'univers de ses particules.

Quand on enlève une dimension spatiale, comme sur ce schéma d'espace-temps, une sphère devient un disque.

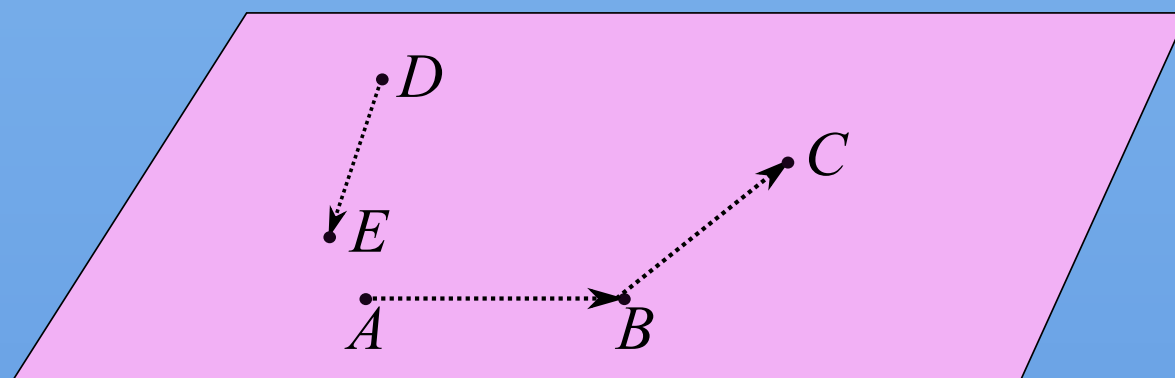
L'espace-temps sans gravitation: La géométrie de la relativité restreinte.

Le premier espace géométrique utilisé pour faire de la *chronogéométrie* :
L'espace-temps sans gravitation est un espace affine de dimension 4.
(C'est la définition moderne de l'espace Euclidien classique...)



Un espace affine c'est un espace de points avec :

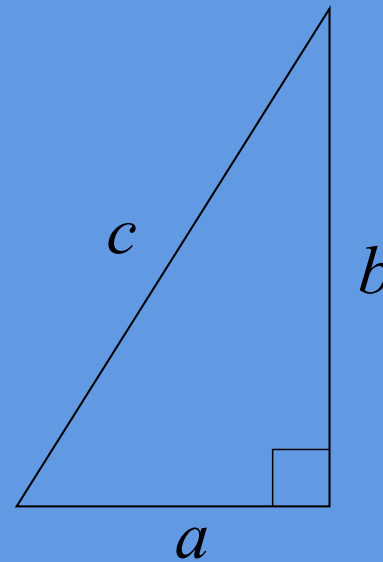
- Un espace vectoriel associé : des vecteurs, que l'on peut voir comme les déplacements d'un point à un autre, et qu'on peut additionner et multiplier par un nombre.
- Une notion de droite, définie grâce aux vecteurs.
- Une Dimension : nombre minimal de vecteurs qui permettent de reconstruire, par addition et multiplication par un nombre, tous les autres. (Un tel jeu minimal de vecteurs est une base.)
- Des repères, ou référentiels : des vecteurs de base plus un point origine.



Géométrie signifie « science de la mesure du terrain ».
Il nous faut donc maintenant voir comment on mesure des distances dans un espace affine...

Pythagore... en toute dimension.

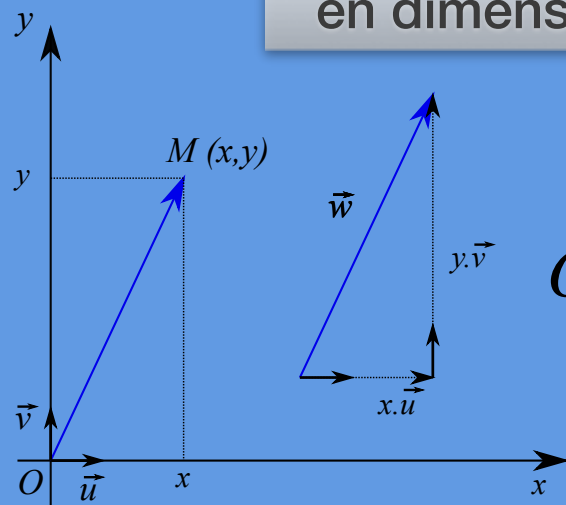
$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Donc, dans un repère orthogonal...

en dimension 2 :



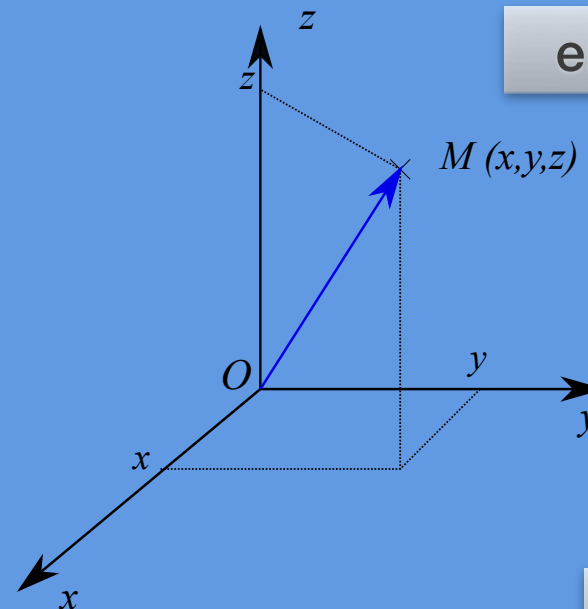
$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Note : ça marche aussi pour les vecteurs : $|w| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Note : la **dimension** d'un espace géométrique, c'est le **nombre de coordonnées** qu'il y faut pour repérer un point.

Dans un espace de dimension 4, où l'on repère donc les points avec 4 coordonnées, (x,y,z,w), on peut définir la distance euclidienne entre un point origine O et un point M de coordonnées (x, y, z, w) par :

en dimension 3 :



$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

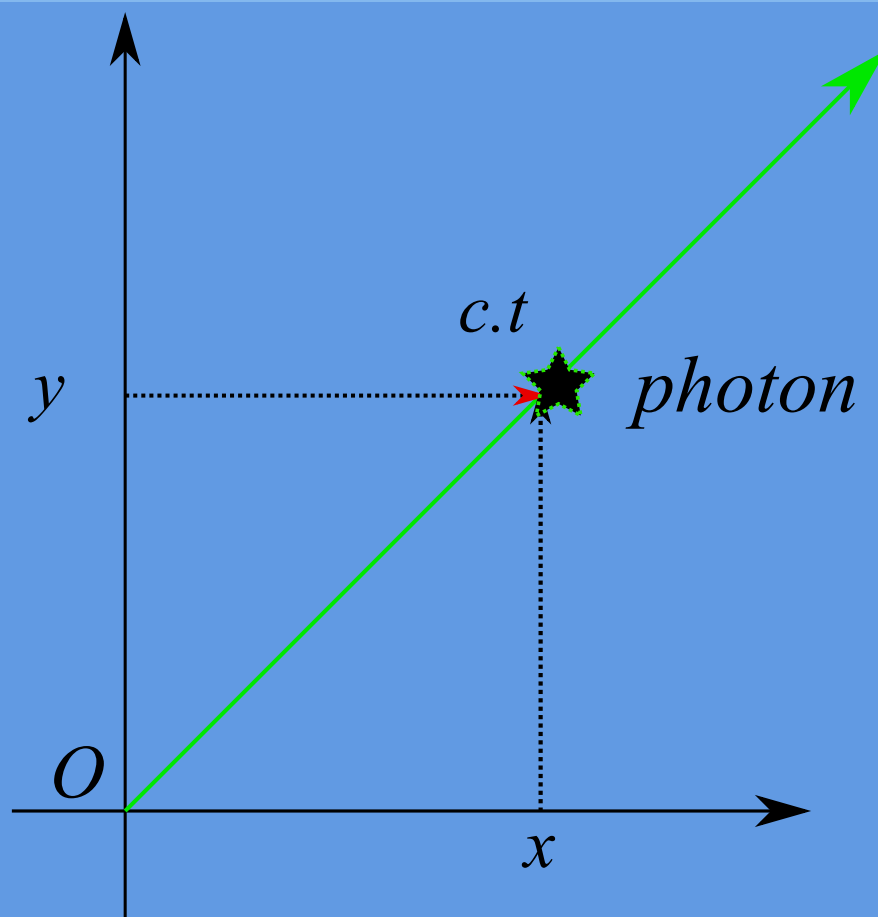
en dimension 4 :

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

Une observation décisive de Poincaré, Minkowski...

Minkowski, s'appuyant sur les travaux d'Einstein et de Poincaré, partit de l'idée suivante : si c est la vitesse de la lumière, alors un photon émis au point O , de coordonnées $(0, 0, 0)$, parcourt en un temps t une distance $c.t$. Si on appelle (x, y, z) les coordonnées du photon à cet instant t , sa distance spatiale à O peut alors aussi s'écrire $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Elevant au carré ces deux distances on a donc $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$, soit :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0.$$



Ou, pour un mathématicien considérant $c=1$,

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

Cette quantité doit donc être importante...

Diagramme dans l'espace « classique »... (on a pris ici $z=0$)

Pythagore revu et modifié :

1/ On simplifie notre cadre géométrique en regroupant les mesures de distance et de temps dans un seul espace : *l'espace-temps, un espace affine de dimension 4.*

2/ Quand on veut mesurer des distances entre deux événements, il faut alors penser à la distance spatiale et à la distance temporelle. Pour faire de la *géométrie*, on munit alors l'espace-temps d'une mesure des distances *spatio-temporelles* avec un « *théorème de Pythagore modifié* ».

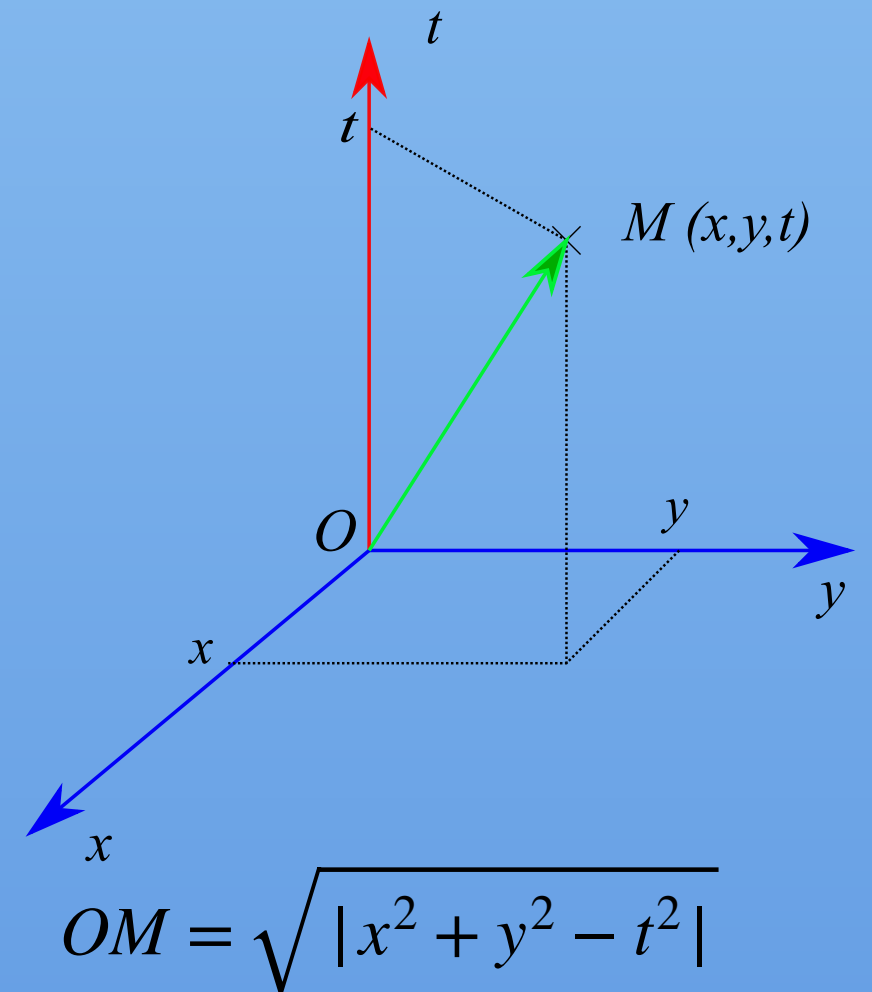
Coup d'audace :

On définit la *distance spatio-temporelle* d'un point origine O à un point M de coordonnées (x,y,z,t) par :

$$\sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - t^2|}$$

On l'appelle une « *pseudo-distance* ».

Toute l'astuce est dans le signe - !

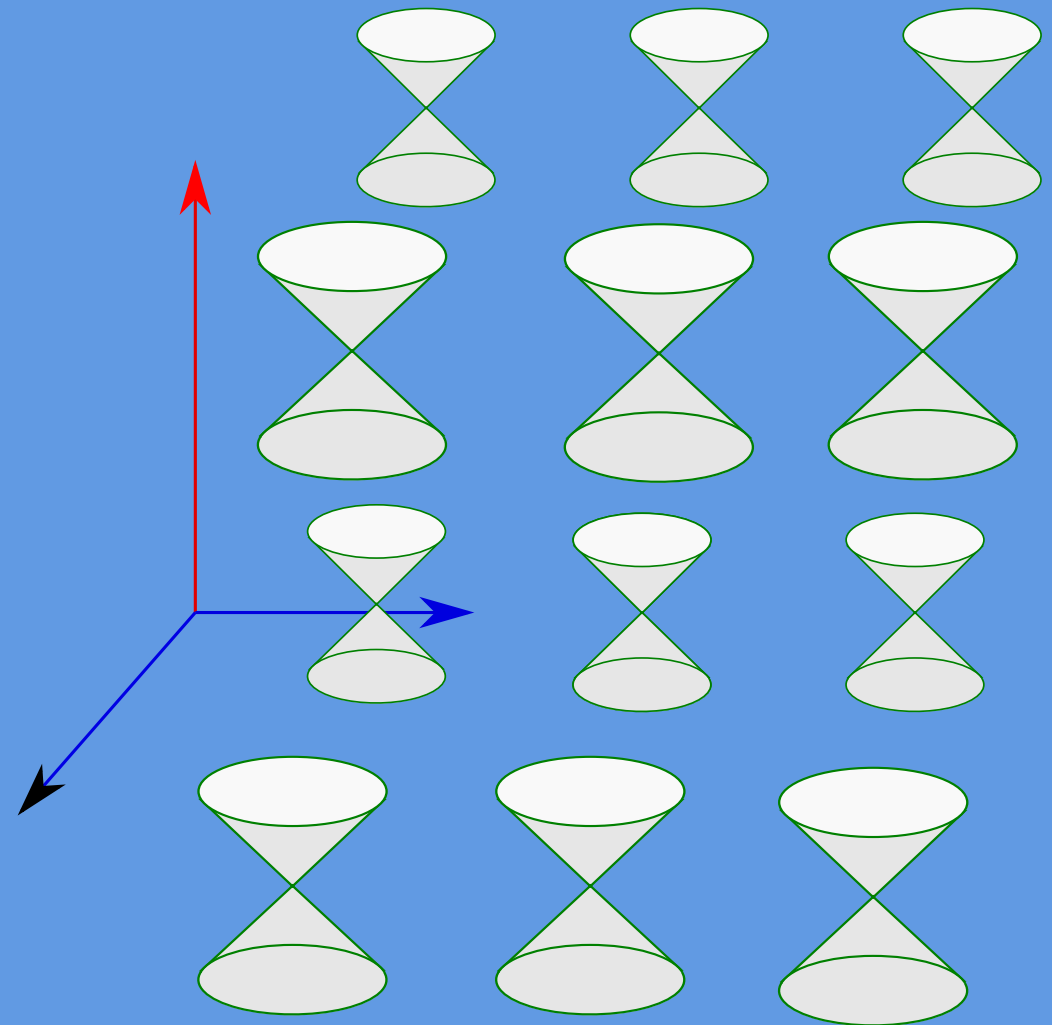
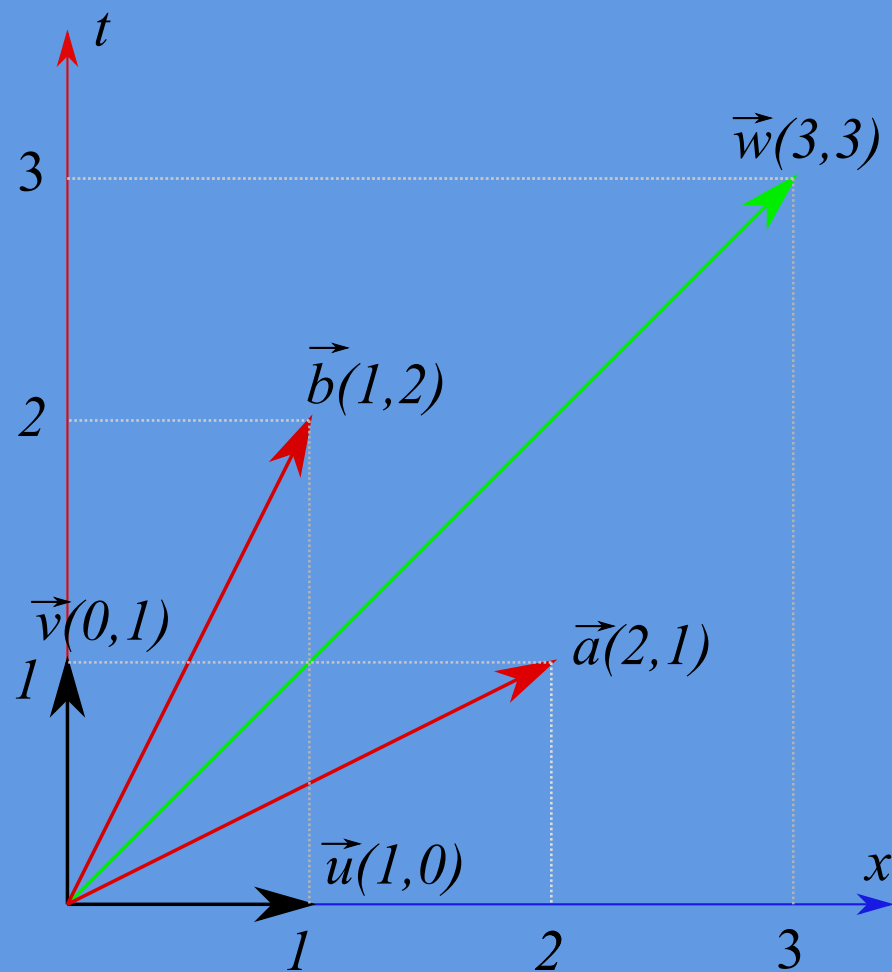


(on a supprimé z ici)

On obtient une *nouvelle géométrie* :

Deux caractéristiques essentielles :

- Une notion plus générale d'orthogonalité, de nouveaux repères « orthogonaux ».
- Une nouvelle structure : les cônes de lumière.



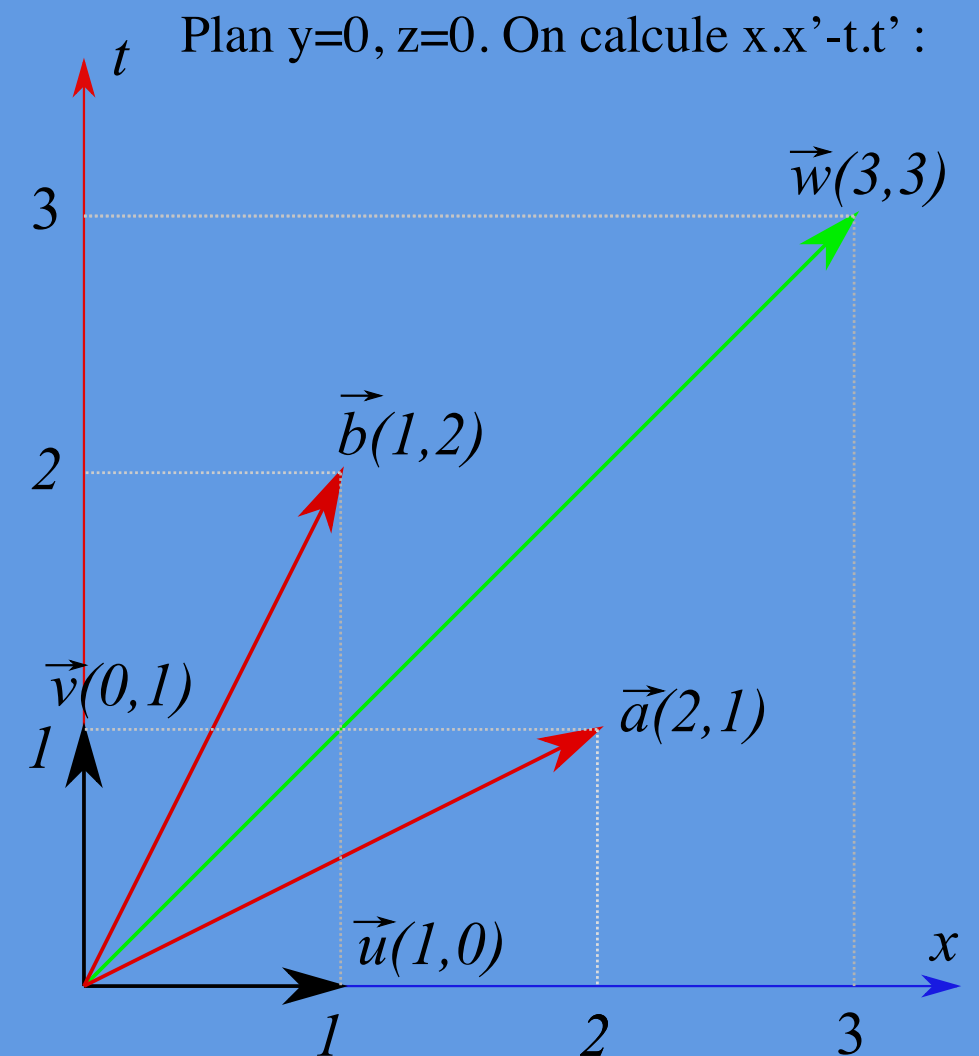
On obtient une géométrie aux propriétés étonnantes, mais parfaitement cohérente...

- Qu'est-ce que l'orthogonalité :

Rappel : Pythagore est à double sens : donc un triangle qui vérifie la relation de Pythagore ($a^2 + b^2 = c^2$) est rectangle. Cette relation définit donc l'orthogonalité.

On se sert de cette idée avec « Pythagore modifié » . on obtient une notion plus générale d'orthogonalité :

- A partir de Pythagore, les mathématiciens ont inventé une machine à détecter l'orthogonalité : le produit scalaire.
- Les expressions $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ et $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ (Pythagore modifié) sont des « formes quadratiques ».
- On leur associe des « produits scalaires » : pour deux vecteurs $u=(x,y,z,t)$ et $v=(x',y',z',t')$ leur produit scalaire c'est : $u \cdot v = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' + t \cdot t'$ ou, pour Pythagore modifié par un dernier signe - , $u \cdot v = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' - t \cdot t'$.
- Par définition, deux vecteurs sont dits « orthogonaux » si leur produit scalaire vaut 0.
- Toute l'astuce est dans le signe « - » !
- Avec le -, les repères orthogonaux vont avoir un aspect... étonnant !
- Visuellement, (avec de bonnes unités, $c=1$, et $y=z=0$), deux vecteurs sont orthogonaux si ils sont symétriques par rapport à une diagonale.

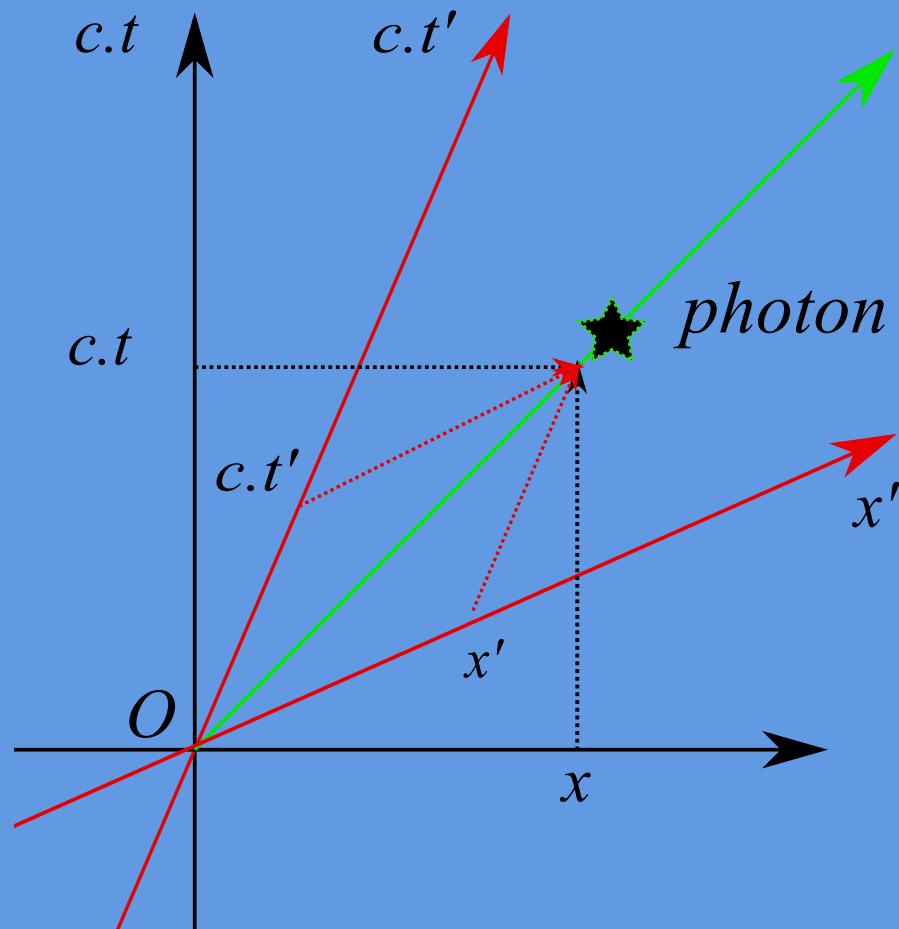


Calculer : $u \cdot v$; $a \cdot b$; et $w \cdot w$. Conclure...

On obtient une géométrie aux propriétés étonnantes, mais parfaitement cohérente...

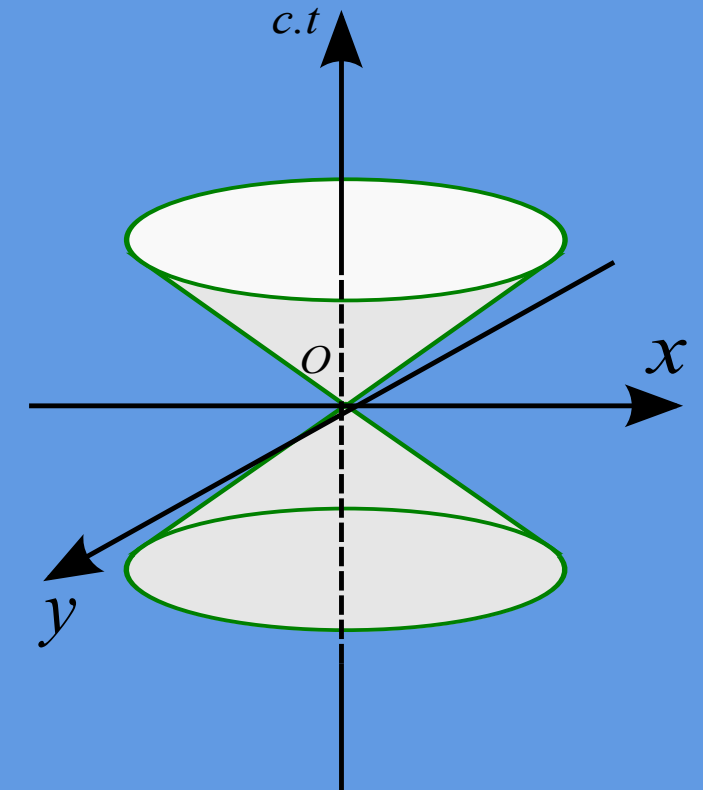
Les cônes de lumière.

Dans le plan $y=0, z=0$, on utilise la pseudo-distance $\sqrt{|x^2 - (c \cdot t)^2|}$:



- Tous les points de la droite verte sont à une pseudo-distance nulle de O .
- On postule que cette droite est la ligne d'univers d'un photon !
- En marquant tous les points à pseudo-distance nulle de O , i.e tels que $x^2 + y^2 + z^2 - (c \cdot t)^2 = 0$, on obtient le cône de lumière de O !
- (On peut montrer que :) Ce cône est indépendant des axes de coordonnées choisis.

Le cône de lumière de O ,
avec 2 coordonnées spatiales, x et y (« plan » $z=0$) :



on «marque» tous les points tels que $\sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - (c \cdot t)^2|} = 0$

- On « marque » tous les points à une pseudo-distance nulle de O , (ou tous les vecteurs de pseudo-longueur nulle), i.e ceux vérifiant (dans un repère orthogonal) :

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

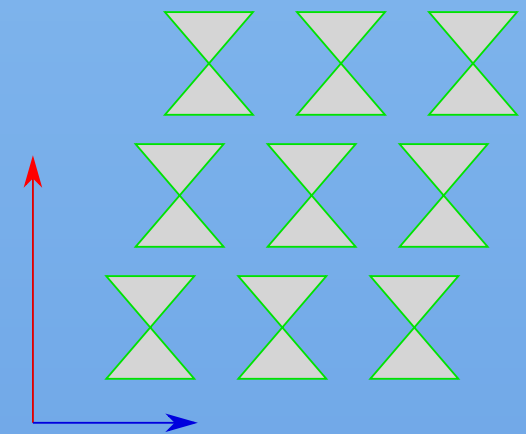
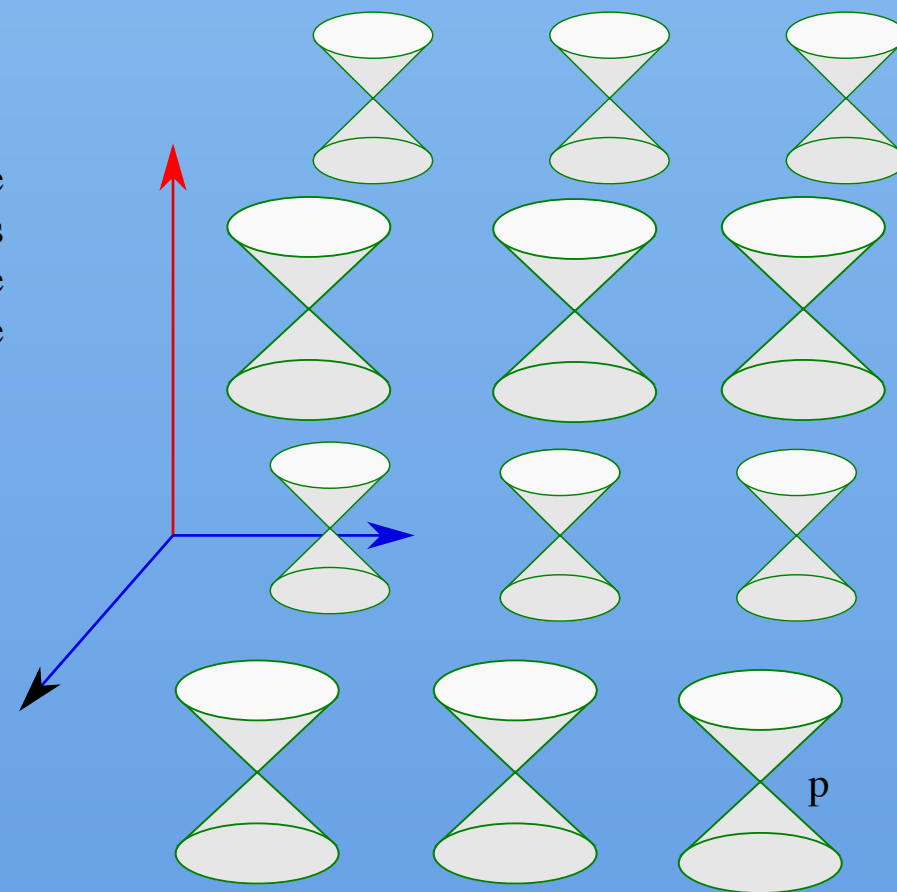
- Avec de bonnes unités ($c=1$) dans un repère de départ, ça donnera des droites à 45° , les diagonales donc. Ce sont les unités qu'on prendra dans toute la suite.
- Un autre repère orthogonal marquera les mêmes points, c'est indépendant des coordonnées choisies : $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$ ssi $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$
- (Note : c'est vrai même dans un repère non orthogonal, mais le changement de coordonnées donnent alors une « formule » pour la pseudo-longueur plus compliquée, comme en géométrie classique d'ailleurs.)
- Les mesures de distances spatio-temporelles sont indépendantes du choix des coordonnées, comme en géométrie classique.

L'espace-temps est structuré par les cônes de lumière.

Chaque point de l'espace affine peut servir de point origine O d'un cône de lumière : L'espace-temps de la relativité restreinte est donc un espace affine de dimension 4 sur lequel on se donne en chaque point un double cône. Ces cônes doivent tous être parallèles entre eux :

Les cônes de lumière sont les mêmes dans tous les repères (référentiels).
C'est la traduction géométrique de la constance de la vitesse de la lumière.

A partir de chaque point p de l'espace-temps, on marque les points à pseudo-distance nulle de p . On obtient le cône de lumière de p .

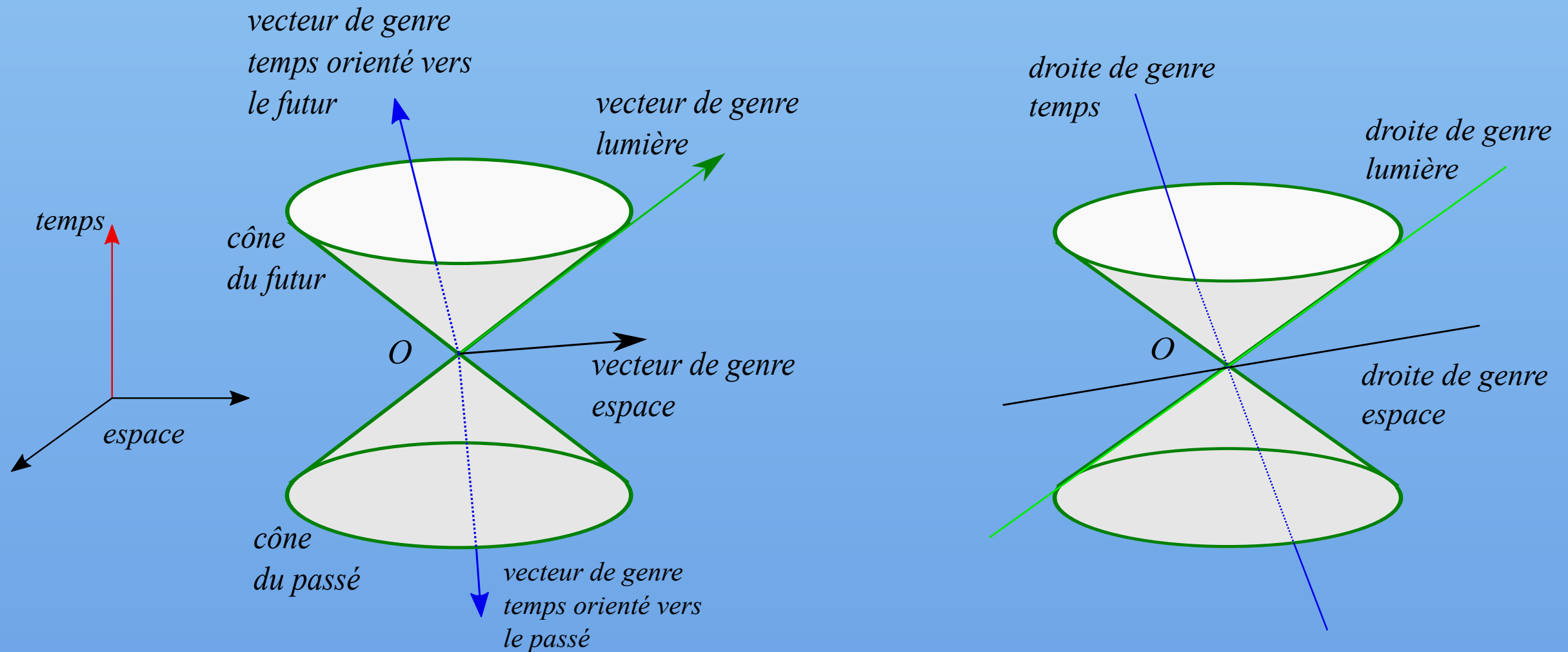


Si on supprime deux dimensions spatiales comme sur la plupart des diagrammes d'espace-temps, les cônes sont « plats ».

Remarque importante : Il faut aussi noter que dans ce diagramme d'espace-temps, une dimension spatiale a été supprimée, et que l'axe des temps est vertical. Par conséquent, chaque tranche horizontale d'un cône, qui sur ce dessin est un cercle, est en fait une sphère : la lumière quitte l'origine du cône dans toutes les directions de l'espace à la même vitesse, et crée donc, à chaque instant, une sphère. C'est pourquoi *le cône de lumière est de dimension 3 dans l'espace-temps de dimension 4.*

Genre temps, genre lumière, genre espace :

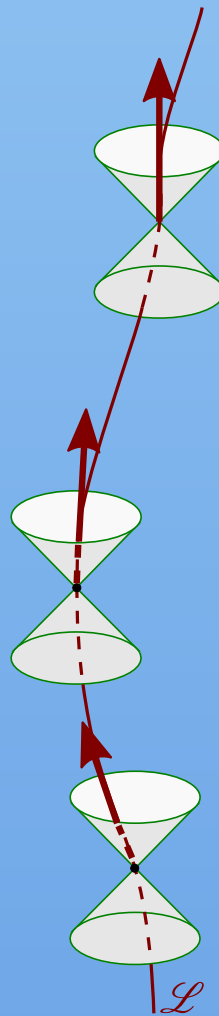
A partir du cône de lumière, on définit trois types de vecteurs ou de droites.



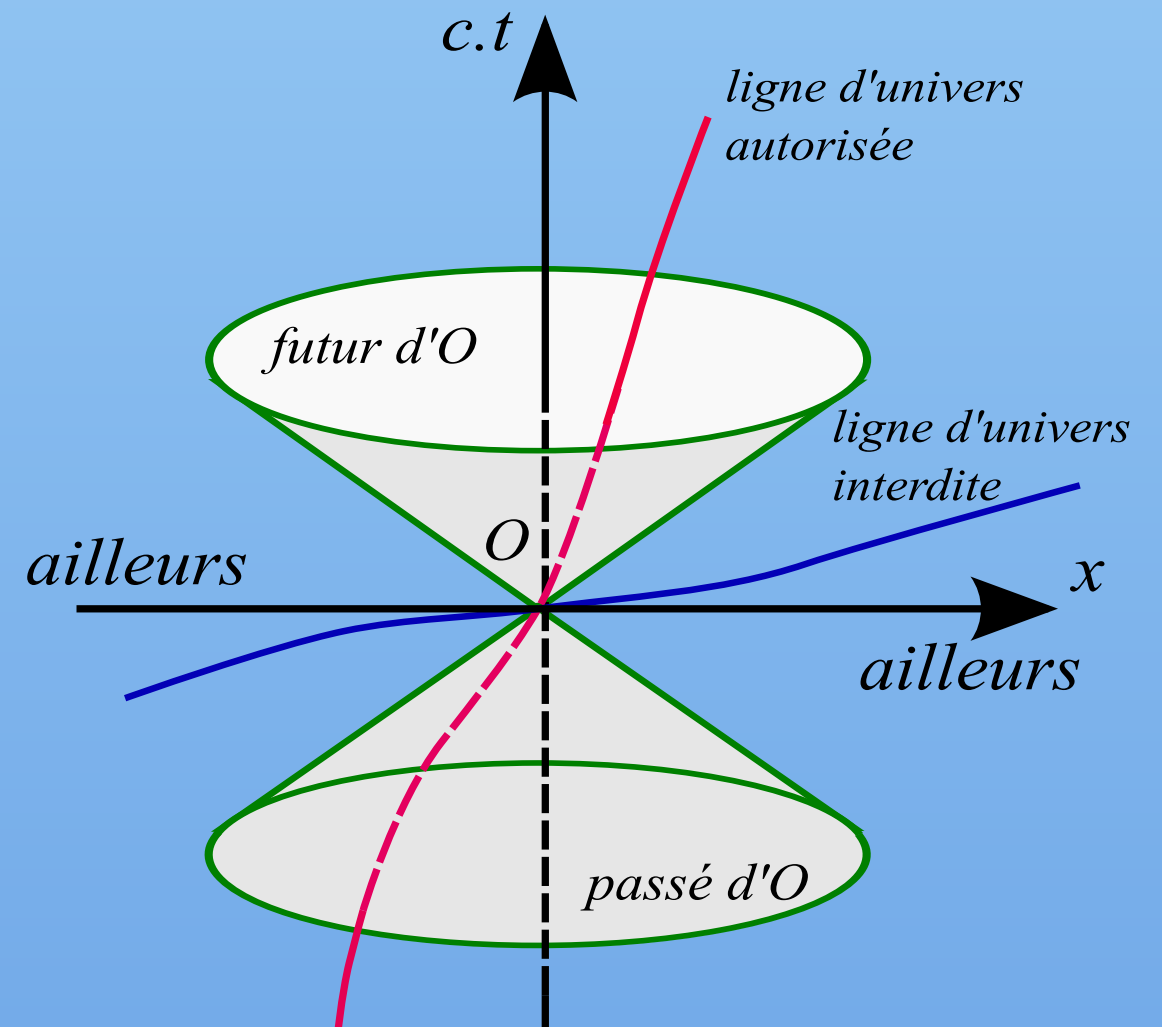
- Par définition, les droites ou vecteurs de genre temps sont à l'intérieur du cône de lumière, ceux de genre espace sont à l'extérieur.
- Les vecteurs (ou droites) de genre lumière sont les génératrices du cône.

Les Postulats de la Relativité Restreinte : Les Lignes d'univers des objets physiques...

La ligne d'univers d'un objet physique :



- Les vecteurs tangents en chaque point de la ligne d'univers doivent toujours être à l'intérieur du cône de lumière.
- C'est la traduction géométrique du postulat qu'aucun objet physique ne peut aller plus vite que la lumière !



- Un **observateur** est représenté par une ligne d'univers de genre temps.
- C'est un **observateur inertiel** si sa ligne d'univers est une **droite**. C'est un observateur qui n'accélère pas. Il peut alors se servir de cette droite comme axe temporel d'un repère orthonormé.
- (au passage, la relativité restreinte traite sans problème les mouvements accélérés...)

Le temps propre d'un observateur : définir géométriquement ce qu'est... *le temps* !

Un observateur dont la ligne d'univers est une droite peut utiliser sa ligne d'univers comme axe "temporel" d'un repère. S'il applique la formule de Minkowski pour calculer la pseudo-distance entre deux points de sa ligne d'univers, il n'utilisera que la coordonnée temporelle car dans son repère les coordonnées spatiales des deux points seront égales à zéro : ici

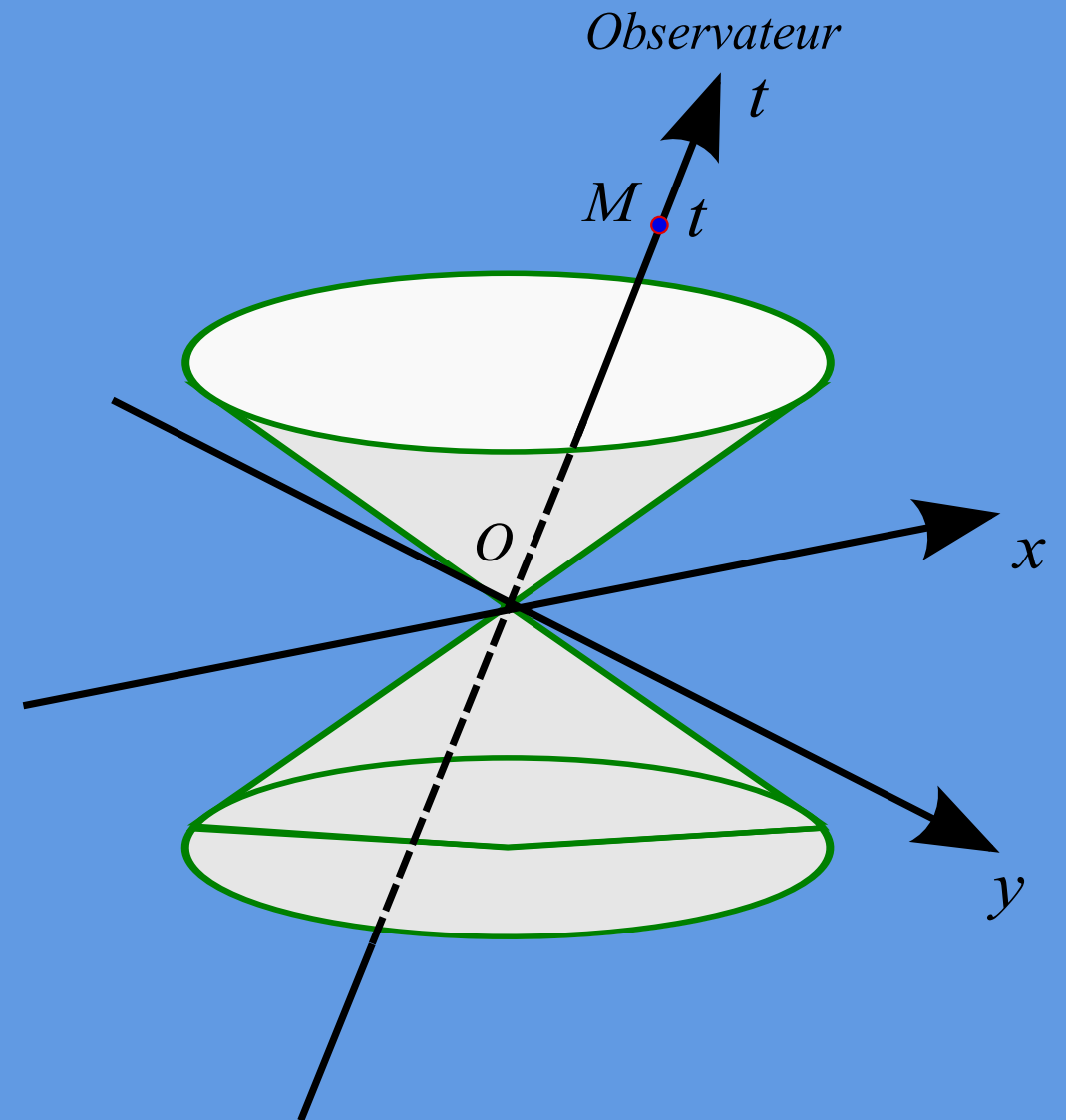
$$M=(0,0,0,t) \text{ et } OM = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - t^2|} = \sqrt{t^2} = |t|.$$

Il considérera donc que la pseudo-distance entre ces deux points est une durée.

De manière imagée : « Un observateur immobile dans l'espace, avance quand-même dans le temps... »

-La pseudo-distance mesurée entre 2 événements le long de sa propre ligne d'univers par un observateur est appelé le temps propre écoulé entre ces deux événements, pour cet observateur.

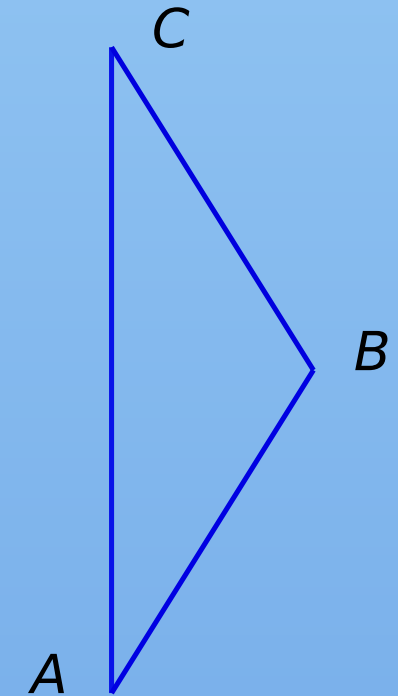
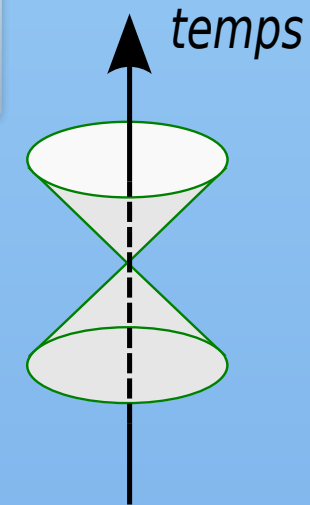
-*Physiquement*, c'est le temps qu'il utilise pour mesurer la durée de son voyage entre ces deux points de sa ligne à l'aide d'une horloge qu'il transporte avec lui.



Le "paradoxe" des jumeaux :

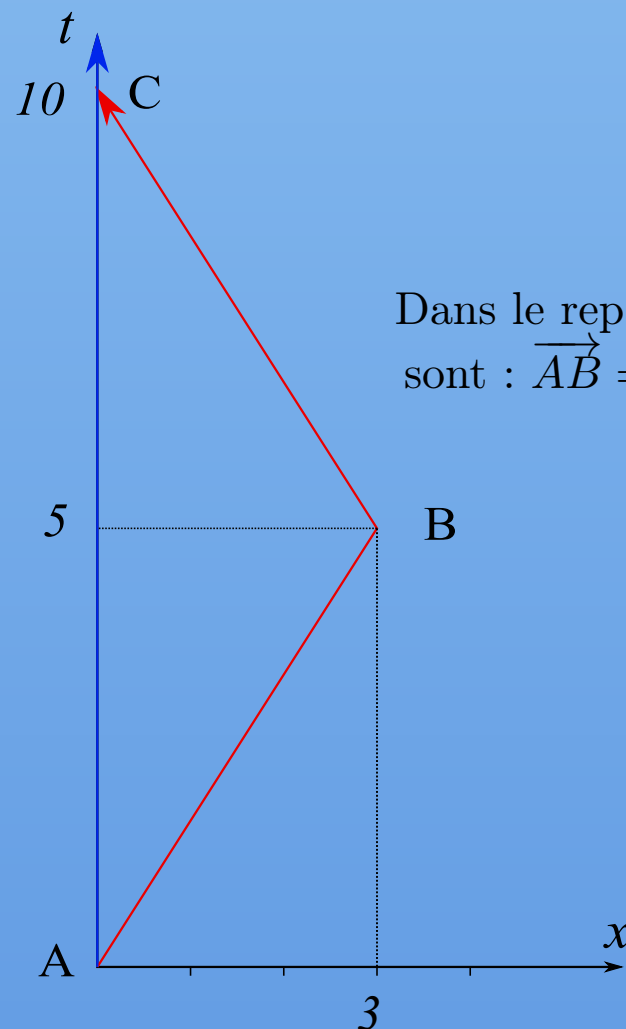
L'inégalité triangulaire inversée :

Cette nouvelle géométrie, due à la pseudo-distance de Minkowski, produit des effets contraires à nos habitudes Euclidiennes : une nouvelle intuition à construire...



Dans la géométrie de Minkowski, pour ce triangle :
 $AB + BC < AC$.

(il faut que chaque coté soit de genre temps)



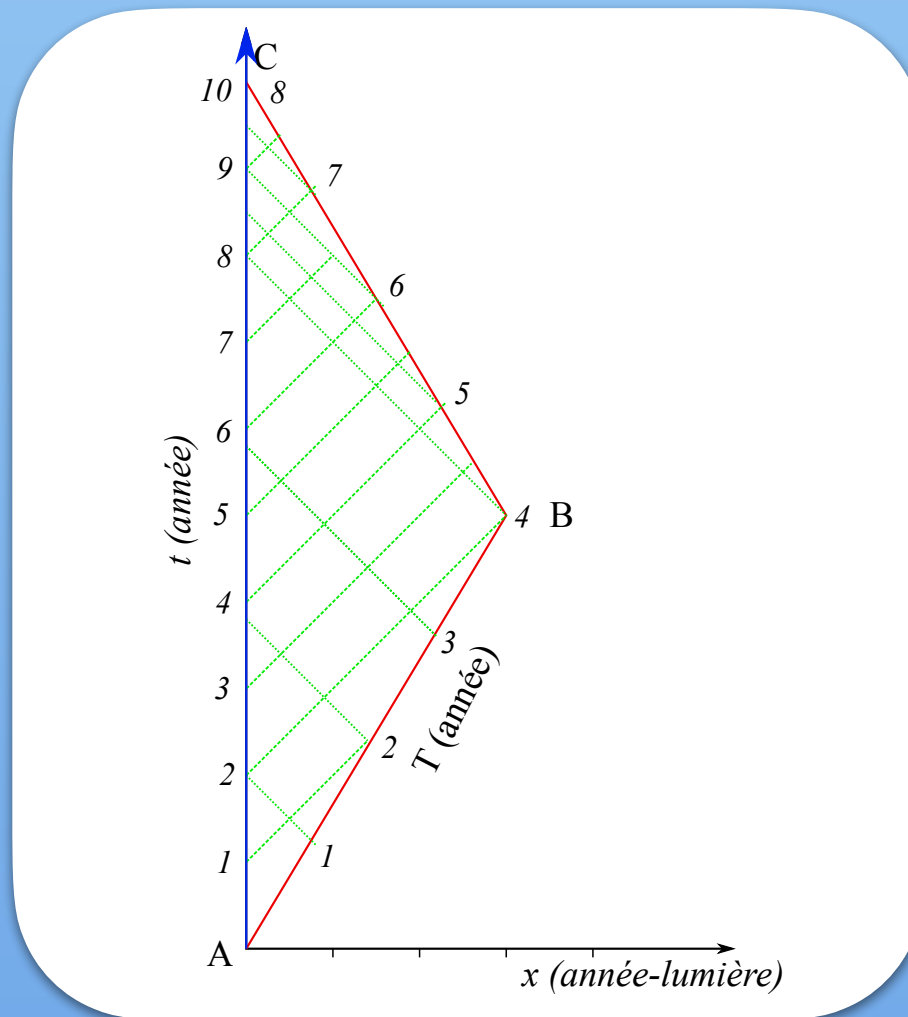
Dans le repère (x, t) , on prend la pseudo-distance de Minkowski $x^2 - t^2$. Les coordonnées des vecteurs sont : $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$, $\overrightarrow{BC} = (-3, 5)$ et $\overrightarrow{AC} = (0, 10)$. Alors leurs pseudo-longueurs sont respectivement :

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{|3^2 - 5^2|} = \sqrt{|9 - 25|} = 4 \\ |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{|(-3)^2 - 5^2|} = \sqrt{|9 - 25|} = 4 \\ |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{|0^2 - 10^2|} = \sqrt{|-100|} = 10 \end{aligned}$$

Donc $AB + BC = 8$ et $AC = 10$.

Dans l'espace-temps de la relativité restreinte, le plus court chemin entre deux points n'est pas toujours la ligne droite !!

Application au voyage aller-retour d'un spationaute, et de son frère jumeau l'attendant sur Terre :



lorsqu'on a choisi la bonne géométrie, ce « paradoxe » est une simple conséquence géométrique !

Le temps propre t du frère resté sur terre est noté sur l'axe vertical. Le temps propre T du voyageur est indiqué le long des lignes d'univers de son voyage. B se situe à une distance spatiale mesurée par le terrien de 3 année-lumière. La différence dans l'écoulement des temps propres des deux jumeaux apparaît en utilisant des photons, dont les lignes d'univers sont matérialisées par les diagonales en pointillés verts : le terrien envoie un flash lumineux tous les ans, lu sur sa montre terrienne. Sur son trajet aller, le spationaute les voit arriver tous les deux ans, lu sur la pendule de la fusée. Sur le trajet retour, il les voit arriver tous les six mois. C'est à partir de ce phénomène (Doppler) que l'on montre la dilatation des durées. À leurs retrouvailles, le terrien aura vieilli de 10 ans, le spationaute de 8 ans.

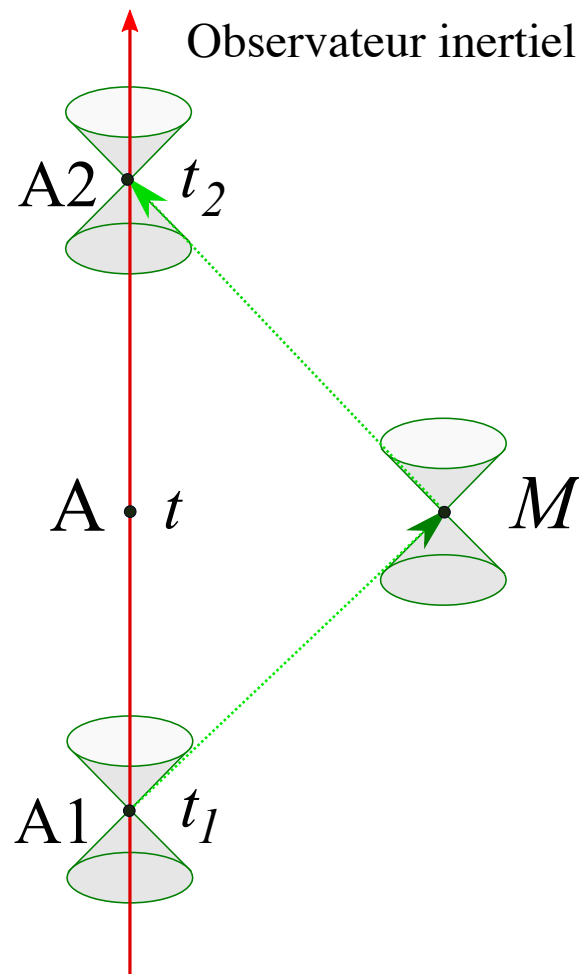
La relativité de la simultanéité : « la relativité du temps »

Datation au radar :

Comment un observateur attribue-t-il une date et une distance à un événement lointain ?

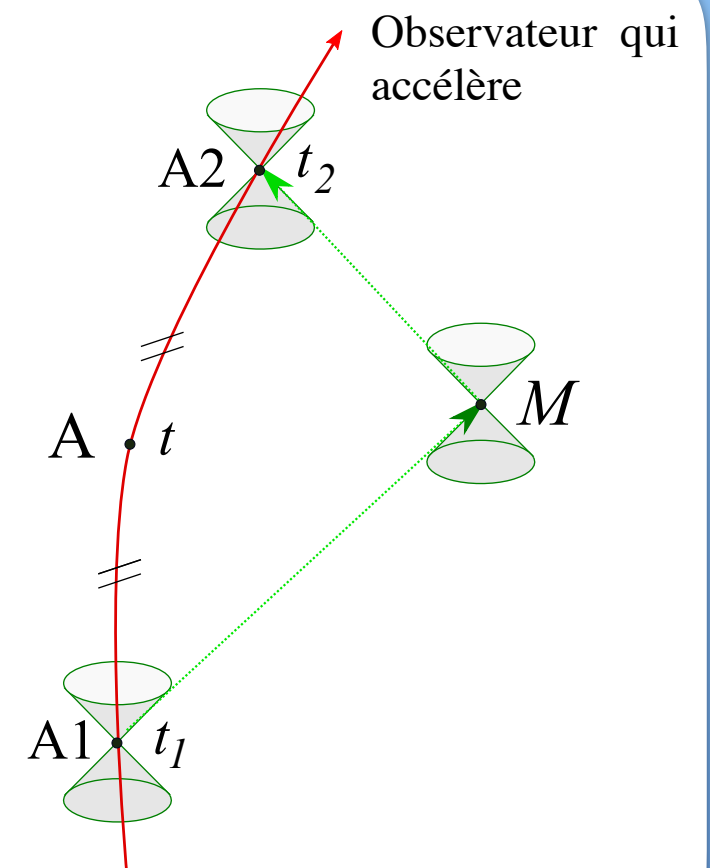
C'est Poincaré qui a trouvé la bonne méthode :

Il utilise la seule chose sûre, la vitesse de la lumière ! Il « flashe » les événements lointains.



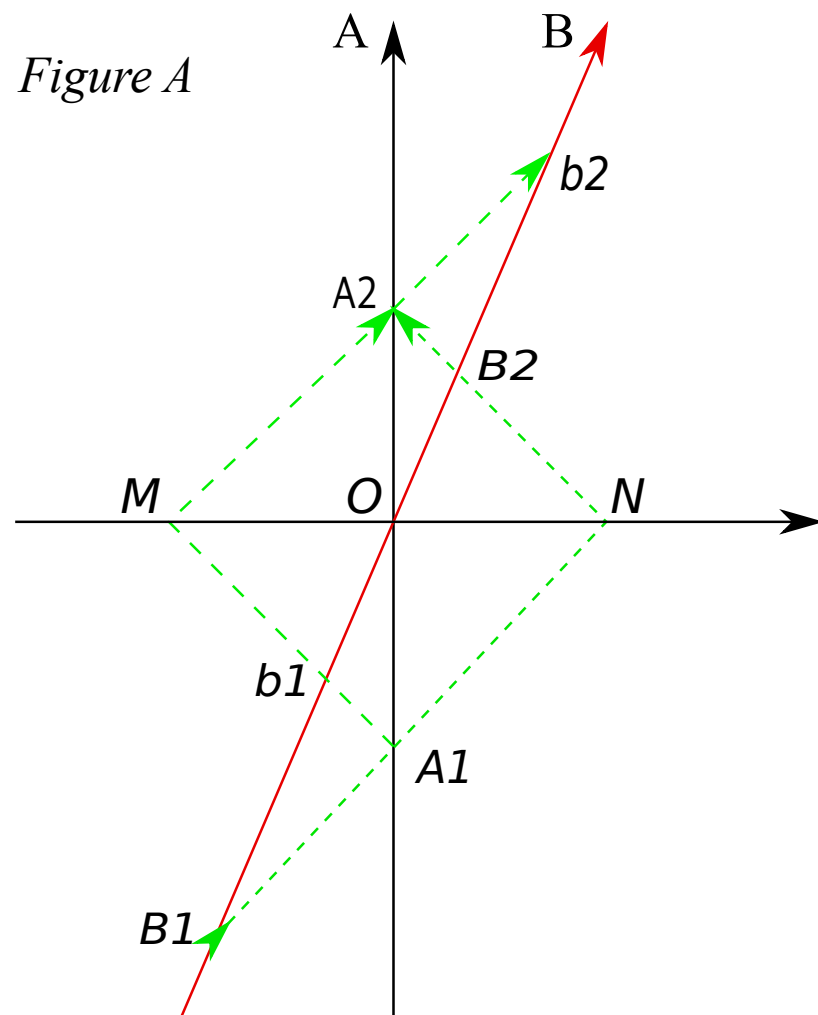
Les événements A et M sont simultanés pour l'observateur O si et seulement si A est situé à mi-temps de l'aller-retour d'un photon de O vers M .

O attribue à M la date : $t = (t_2 + t_1)/2$



Ci-dessus, mesure au radar et définition Einsteinienne de la simultanéité : La date et la distance de M pour l'observateur O sont : $t = (t_2 + t_1)/2$ et $d = c.(t_2 - t_1)/2$. Les événements A et M sont simultanés pour O si et seulement si A est situé à mi-temps de l'aller-retour d'un photon de O vers M . L'ensemble des événements simultanés pour cet observateur à cet événement A est l'ensemble des événements qui auront la même date pour lui ; c'est **l'espace de simultanéité** de A pour cet observateur.

Relativité de la simultanéité :



Les événements M et N sont simultanés pour l'observateur A.

Mais N se produit avant M pour l'observateur B.

Le point clef de la démonstration est évidemment que les droites de lumière sont indépendantes de l'observateur ; A et B utilisent donc les mêmes droites pour "flasher" M et N.

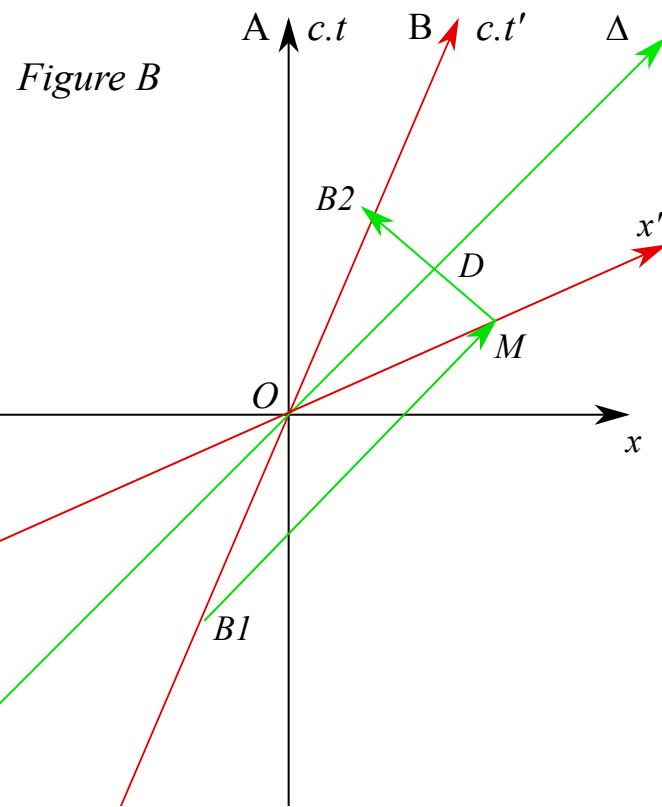
lorsqu'on a choisi la bonne géométrie, cette relativité de la simultanéité est une simple conséquence géométrique !

La simultanéité de deux événements dépend donc de l'observateur, c'est une différence majeure par rapport à la mécanique newtonienne.

Cela prouve qu'il est impossible d'associer une date unique à chaque événement de l'espace-temps, mais seulement des dates relatives aux observateurs. Ainsi, si deux événements M et N sont simultanés pour un observateur, un deuxième observateur pourra voir M se produire *avant* N, alors qu'un troisième observateur pourra voir M se produire *après* N.

Espace de simultanéité :

L'espace « vu » à un moment donné dépend de l'observateur.



Définition : Espace de simultanéité d'un point O : ensemble des points simultanés à O pour un observateur donné. **C'est l'espace « vu » à un moment donné par cet observateur.**

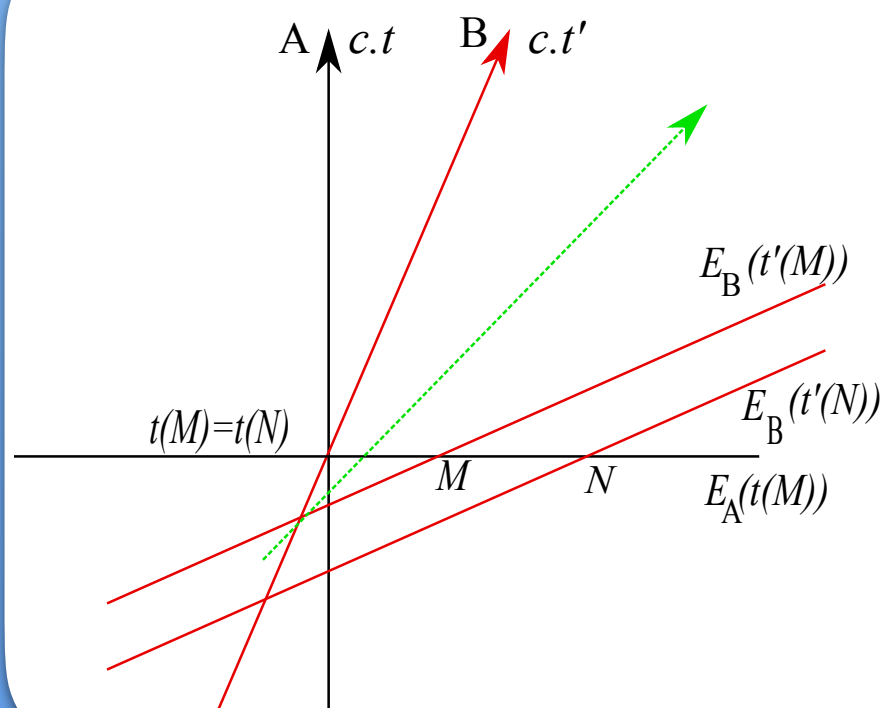
Théorème : En utilisant les droites de genre lumière, il est facile de montrer que pour un observateur inertiel, l'espace de simultanéité de O est la droite symétrique de sa ligne d'univers par rapport à la droite lumière passant par O.

Démonstration : Utiliser Thalès (!) : Quelque soit M sur cette droite symétrique, O est au milieu de B1 et B2.

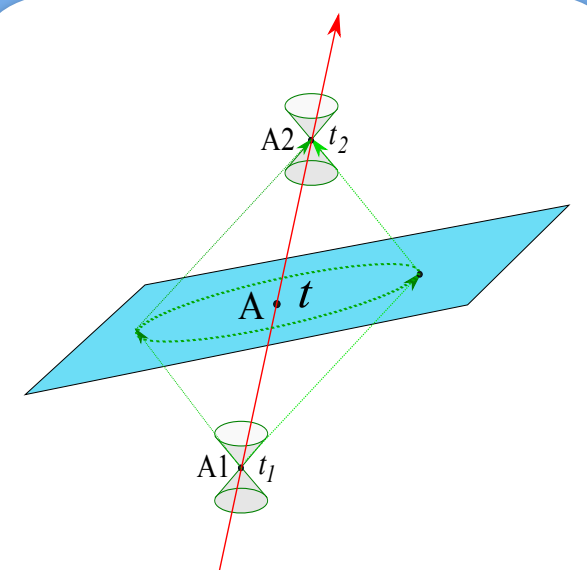
Rappel : Deux droites D et D' de l'espace-temps, se coupant en un point O, sont orthogonales pour la géométrie de Minkowski ssi elles sont symétriques par rapport à une droite lumière passant par O.

Exemple :

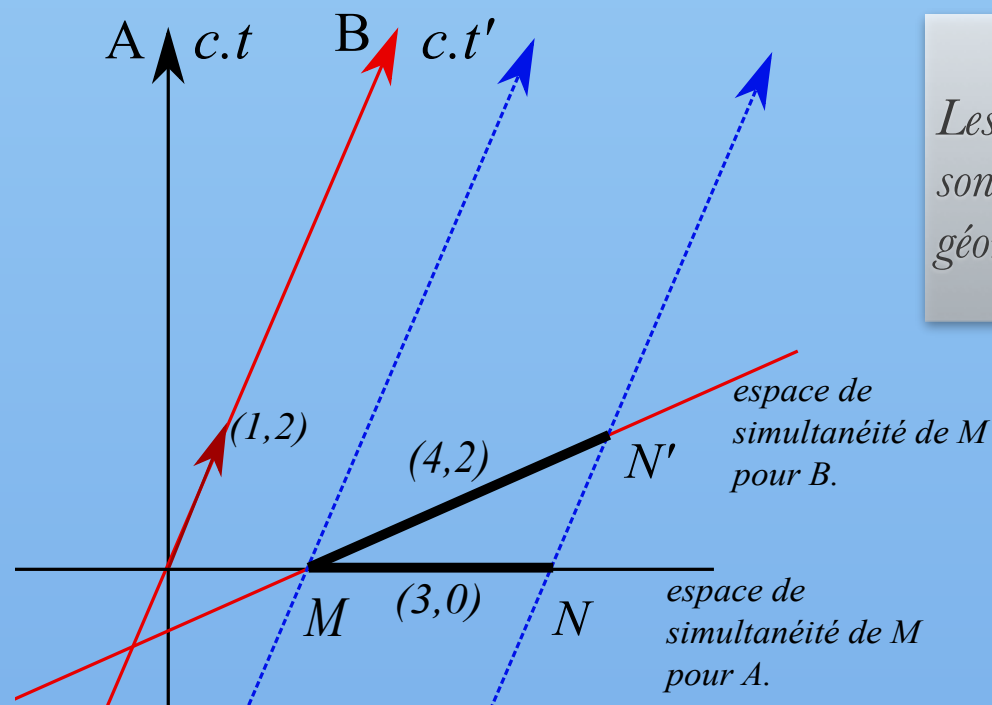
L'espace de simultanéité de M n'est pas le même pour les observateurs A et B.



Remarque : dans l'espace-temps de dimension 4, l'espace de simultanéité est de dimension 3 : c'est l'espace « vu à un moment donné » par l'observateur...



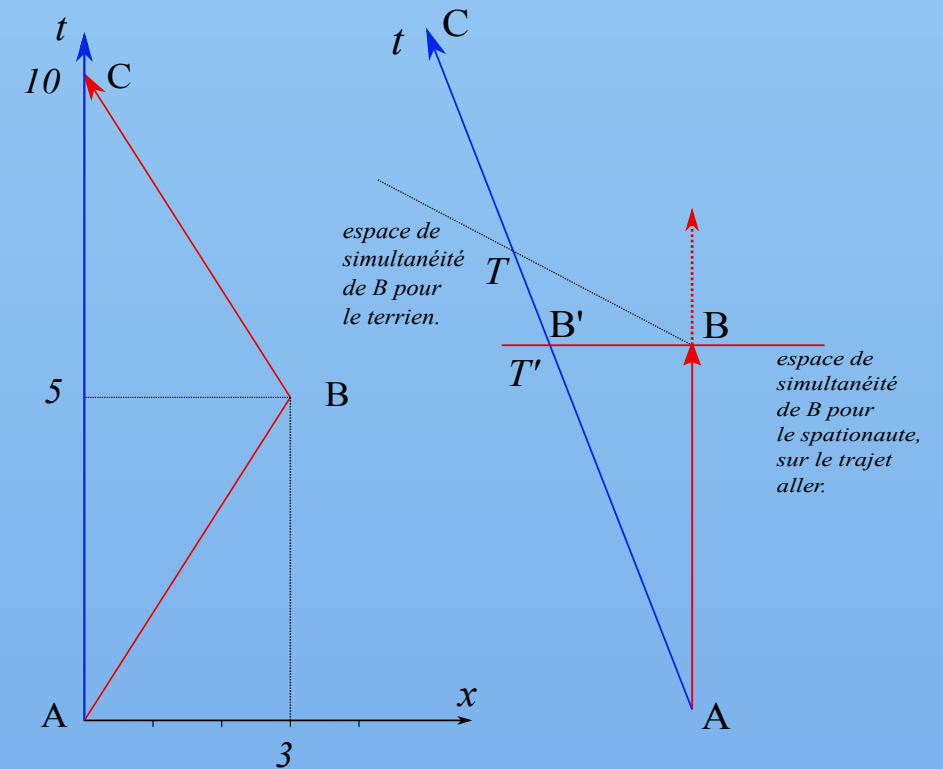
Conséquences : contraction des longueurs, et dilatation des durées.



*Illustrations géométriques :
Les démonstrations de ces effets
sont de simples raisonnements de
géométrie « assez élémentaires »...*

Le point fondamental est que pour mesurer la règle, un observateur doit évaluer la position de ses extrémités à un même moment donné. La règle doit donc être mesurée sur un espace de simultanéité, i.e sur « l'espace vu à un moment fixé »...

Le segment $[M,N]$ est la règle « vue » et mesurée par l'observateur A, sa pseudo-longueur vaut $\sqrt{3^2} = 3$. Le segment $[M,N']$ est la règle « vue » et mesurée par l'observateur B, sa pseudo-longueur vaut $\sqrt{4^2 - 2^2} = 3,4... > 3$



*Au moment du demi-tour, le terrien considère que le spationaute a moins vieilli que lui.
Mais le spationaute considère qu'au moment du demi-tour, c'est son frère terrien qui a moins vieilli que lui ! ($T' < AB = 4$).*

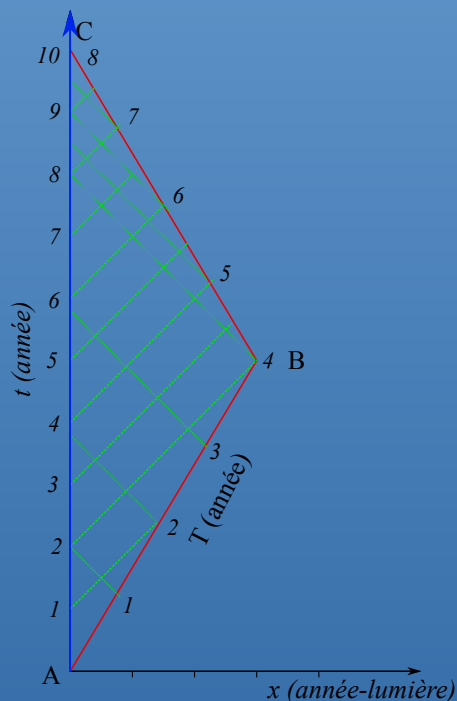
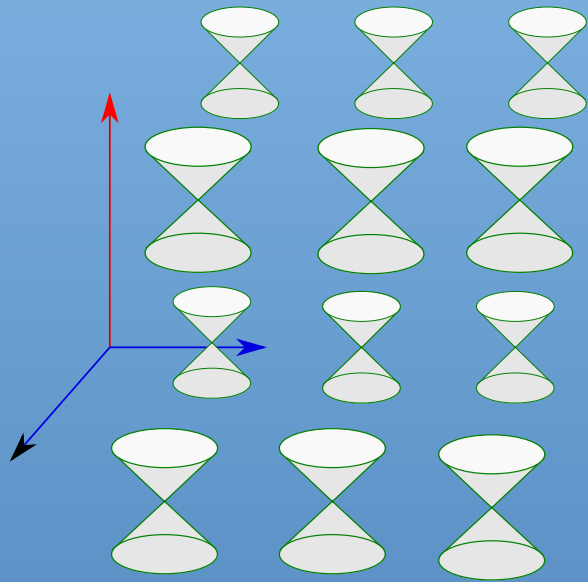
Le point clef, c'est que jusqu'au demi tour, les situations sont effectivement symétriques. Ce n'est plus le cas au moment des retrouvailles ! Le terrien et le spationaute n'attribuent pas les mêmes dates à l'événement demi-tour ! (Dans le repère de B :

$$T' = |AB'| = \sqrt{|X_{B'}^2 - |AB|^2} < |AB| = 4 .$$

Cela signifie simplement que deux observateurs différents n'attribuent pas la même date à un événement donné.

**Attention : ces effets ne sont dus qu'à la nécessité de définir précisément le processus de mesure lié à chaque observateur.
Aucune règle ne se contracte, aucun temps ne se dilate !!**

$$OM = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - t^2|}$$



- On a postulé une nouvelle géométrie en modifiant le théorème de Pythagore...
- Il est donc « *normal* » d'obtenir des « phénomènes » mathématiques différents de ceux de la géométrie classique d'Euclide liée au théorème de Pythagore.

Mais ces résultats décrivent et prédisent parfaitement les observations et les résultats des expériences de la physique.

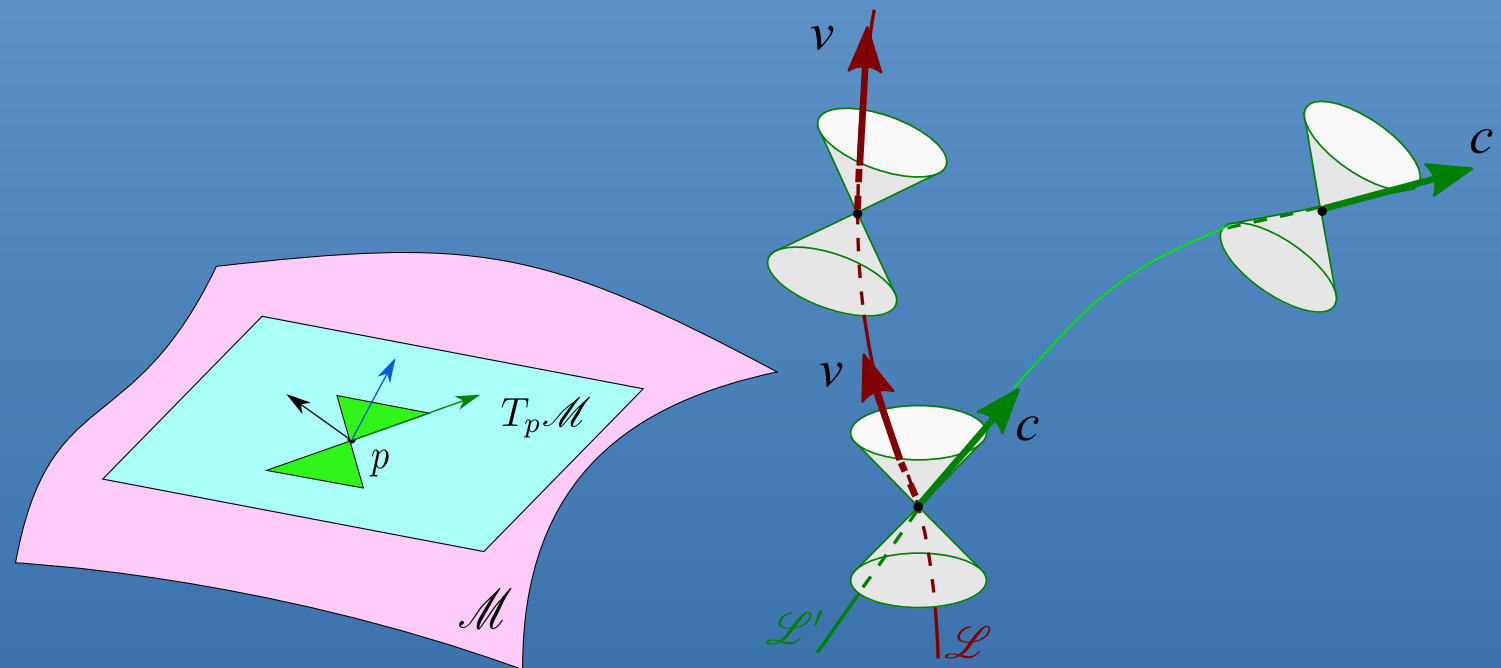
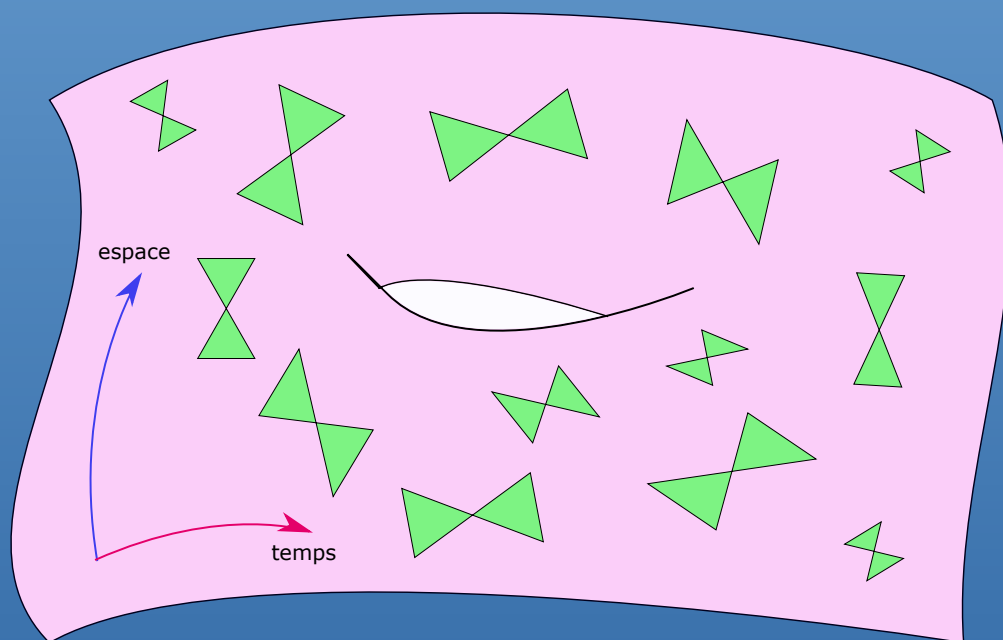
Cette géométrie défie notre intuition usuelle. Mais aujourd'hui c'est celle qui semble le mieux décrire l'univers qui nous entoure.

On a trouvé un « bon » espace géométrique pour faire de la chronogéométrie, sans gravitation ...

Les preuves des phénomènes liés aux mesures de temps et de distances y sont simples... et correspondent à l'observation !!

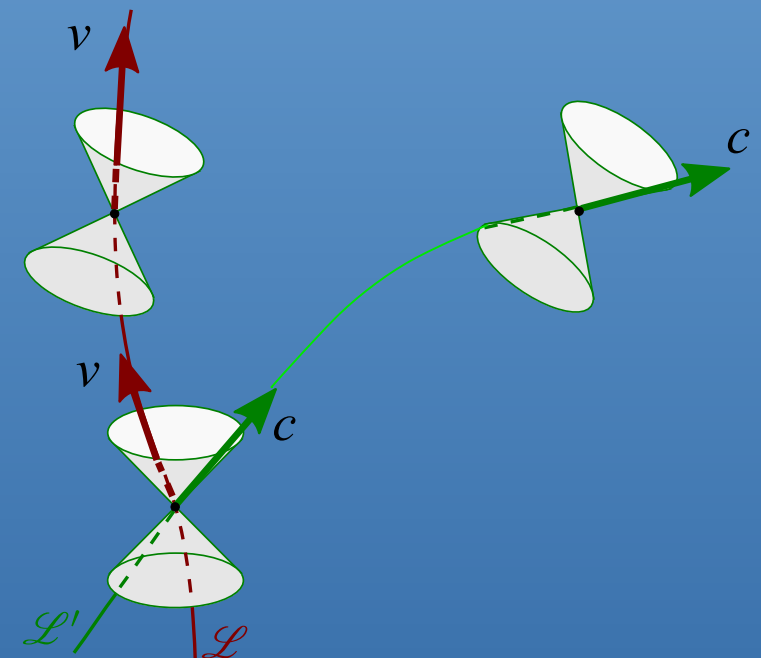
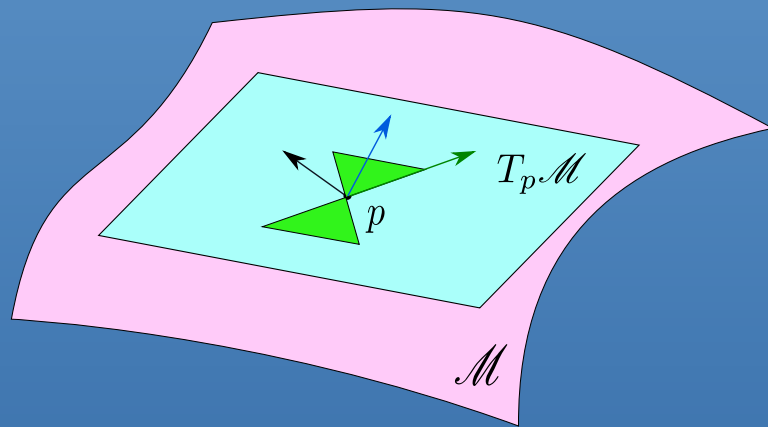
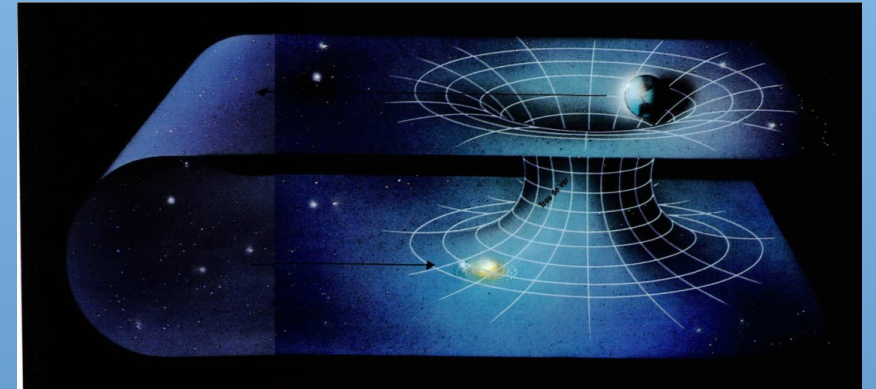
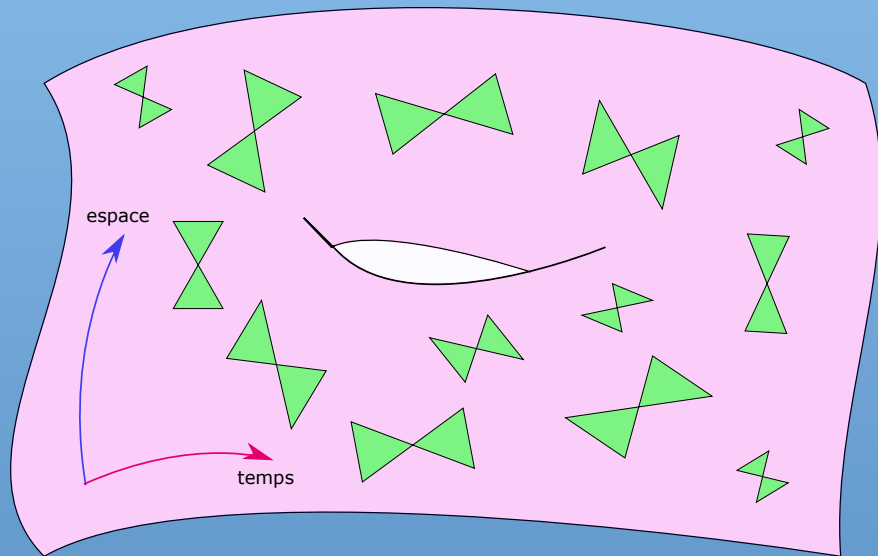
Maintenant, on veut y « inclure » la gravitation...

Quel est la géométrie de l'espace-temps en présence de gravitation ?



Deuxième partie : La relativité générale

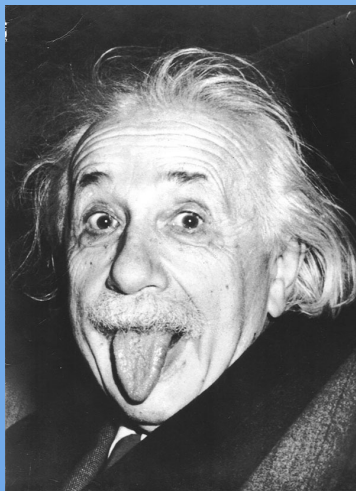
L'espace-temps avec gravitation...



L'espace-temps et la gravitation : La relativité générale.

1A. Approche physique : L'universalité de la chute des corps

Le principe d'équivalence : Tous les corps physiques « chutent » de la même manière dans un champ de gravitation donné, indépendamment de leur composition.



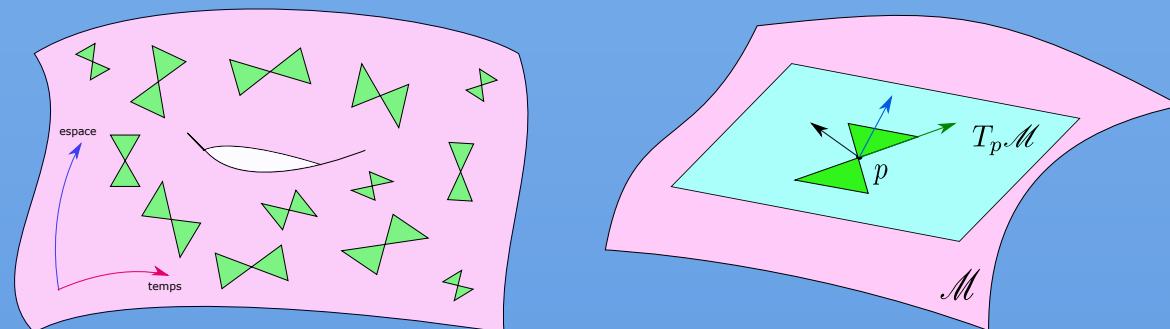
Idée géniale : Le mouvement d'un corps soumis à la gravitation est dû à la forme géométrique de l'espace-temps dans lequel il vit. Quel est cet espace-temps géométrique ?

1B. Approche mathématique : *une géométrie générale !*

On cherche un espace géométrique qui *généralise* l'espace-temps affine de dimension 4 avec ses mesures de pseudo-distances. On veut garder :

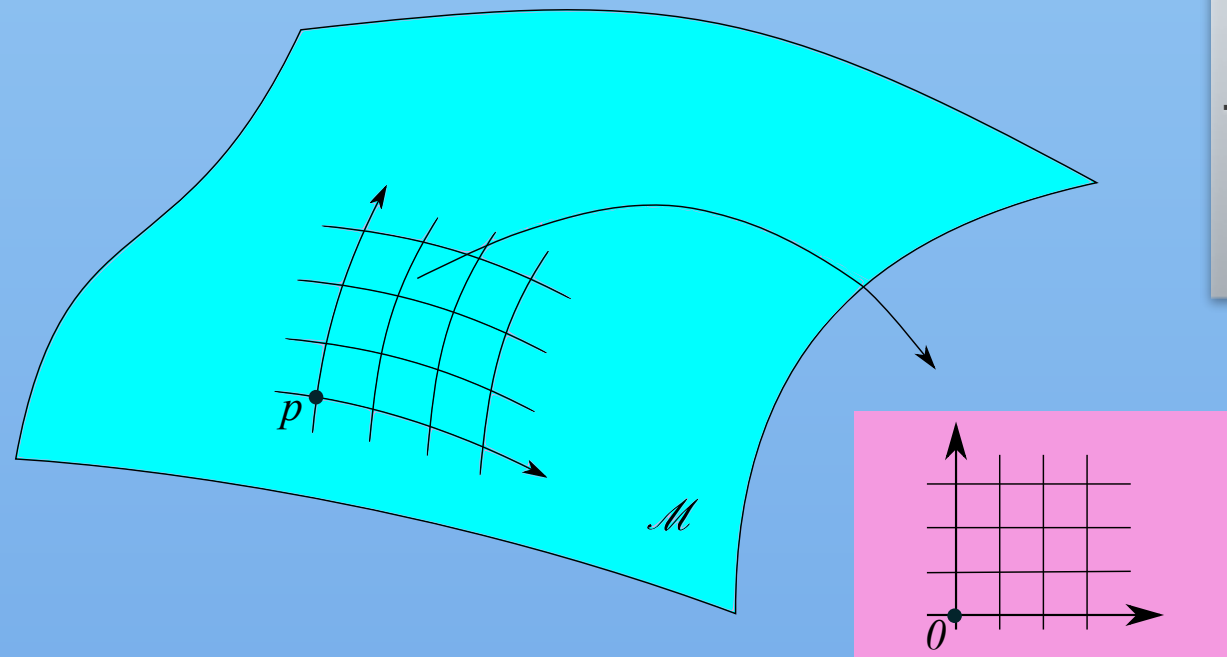
- 4 coordonnées pour chaque point : un espace-temps.
- Des cônes de lumières en chaque point.
- Un moyen de mesurer des pseudo-distances, (le temps propre).

Cet espace géométrique existe !
Il a été inventé en 1860 par Bernhard Riemann !
Il s'appelle une *variété différentielle*...



*La seule notion qu'on abandonne, c'est la notion de droite :
d'où un espace géométrique... courbe !*

Trouver une espace géométrique qui généralise l'espace affine...



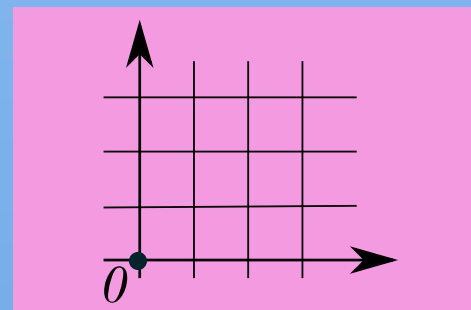
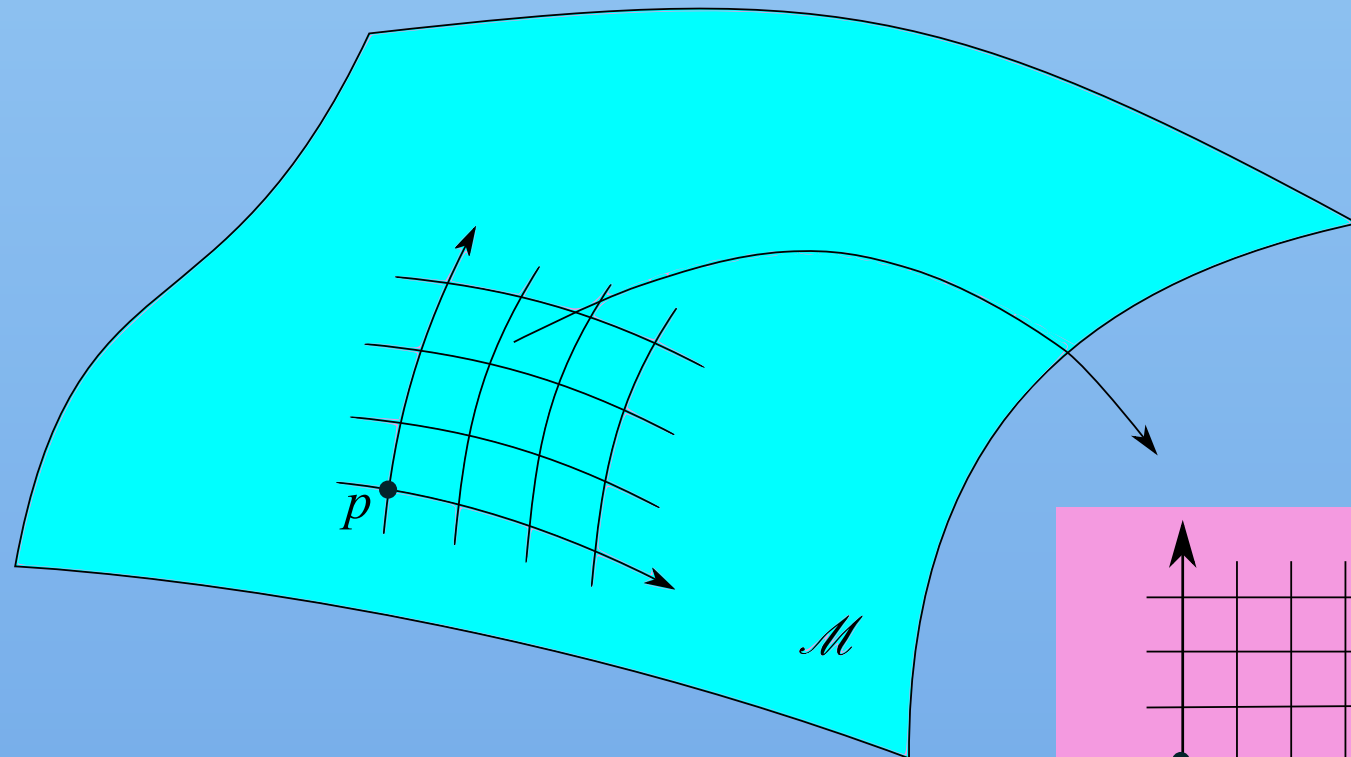
- La géométrie de la relativité restreinte fonctionne très bien...
- On cherche donc un espace qui, au moins « localement » (sur un petit morceau), ressemble à l'espace affine.

Les espaces inventés par Riemann répondent parfaitement à cette demande. Regardés autour d'un point « à la loupe », ils sont « comme » l'espace Euclidien.

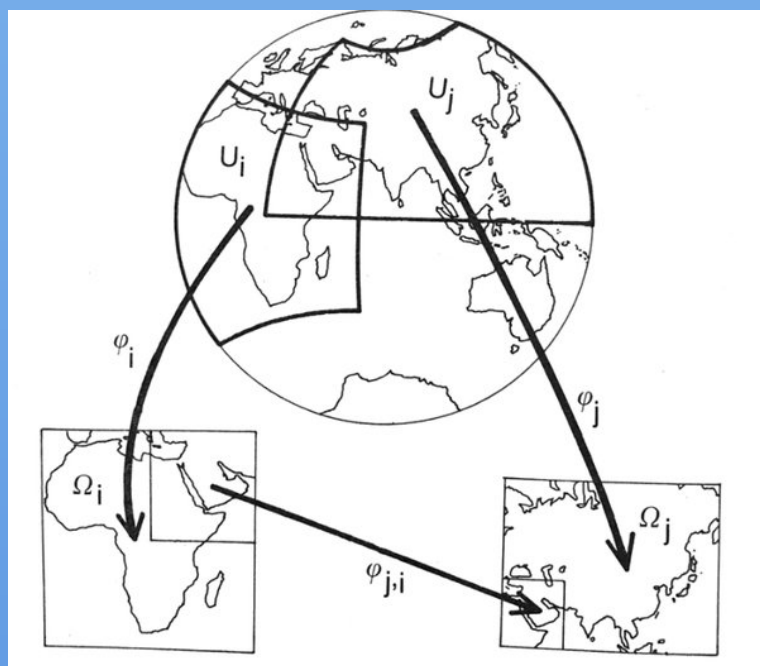
Cette loupe s'appelle une carte...

Les espaces inventés par Riemann s'appellent des variétés différentielles...

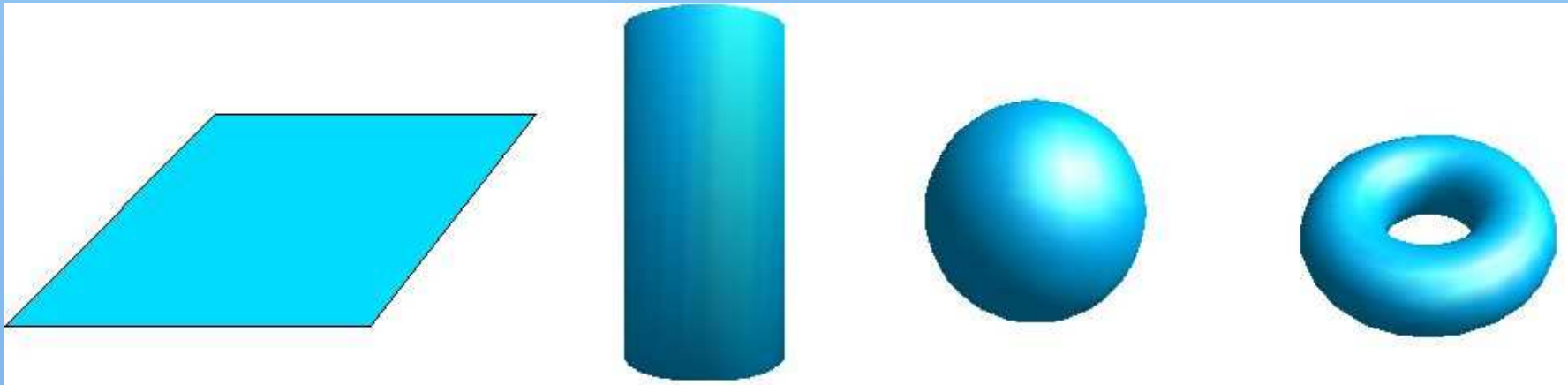
Les variétés différentielles : les espaces courbes.



- Une variété est un ensemble de points qui possède une carte autour de chaque point.
- Une *carte* c'est une bijection bicontinue vers un morceau d'espace affine de dimension fixée.
- Grâce aux cartes, on remonte les repères de l'espace affine sur la variété. On a donc une notion de coordonnées et de dimension.
- Grâce aux cartes, une variété ressemble localement à un espace affine !
- Sur la variété, les axes de coordonnées sont courbes, ils sont « redressés » par la carte. Sur la variété, pas de droites, donc un espace courbe, qui généralise l'espace affine.



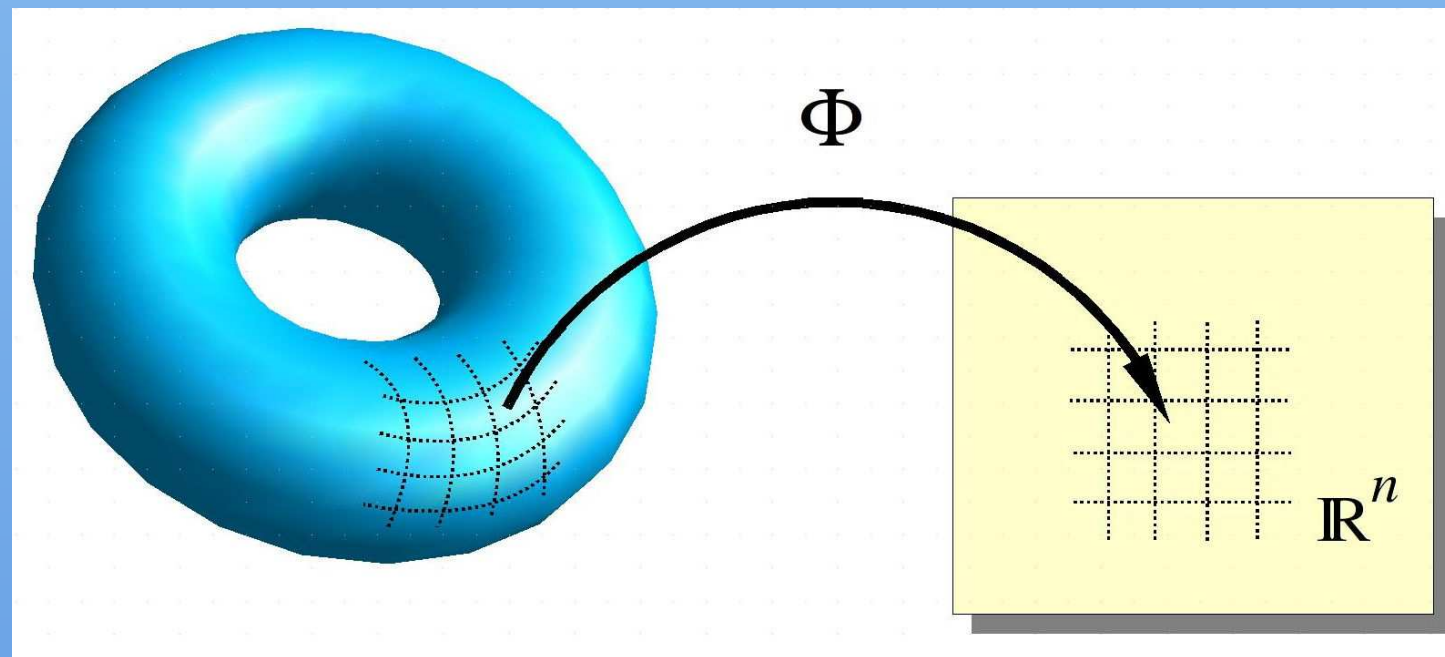
Exemples de variétés de dimension 2...



Exemples de variétés de dimension 2.
De gauche à droite : plan, cylindre, sphère et tore.

C'est la surface de ces formes qui est de dimension 2. L'intérieur de la sphère, la boule considérée comme volume, est de dimension 3.

Localement, le cylindre, le tore... et la terre, ont l'air plats !!

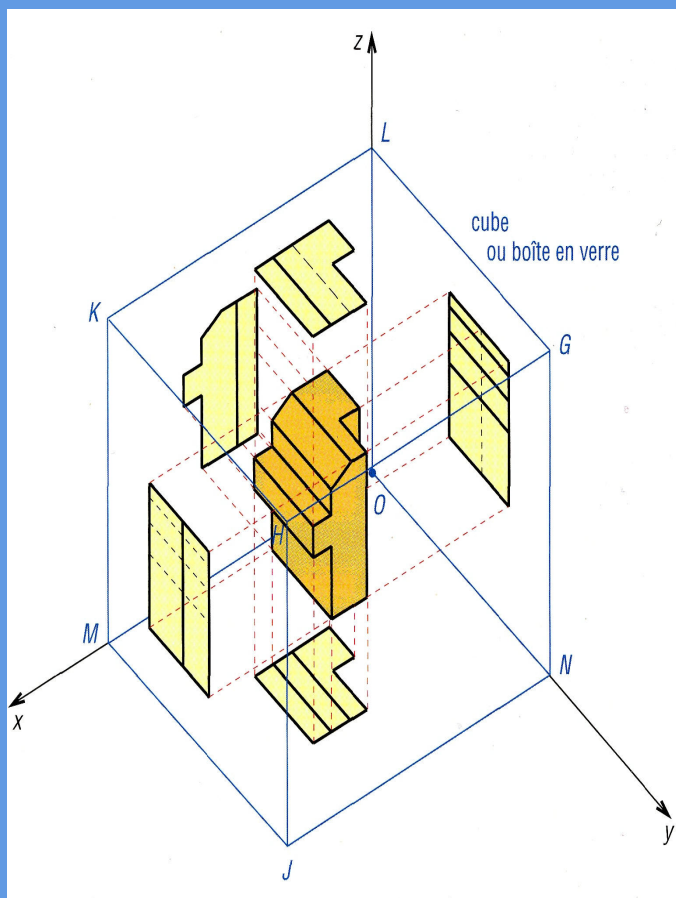


Les Cartes.

Il faut en général plus d'une carte pour recouvrir une variété...

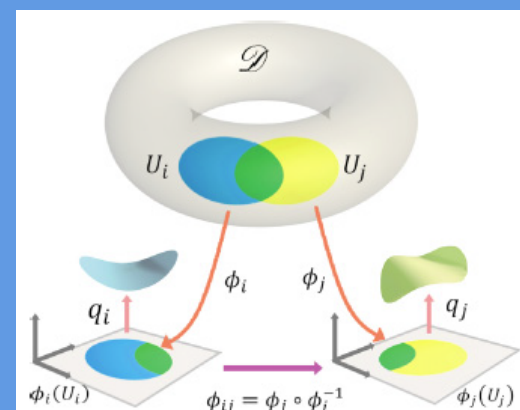
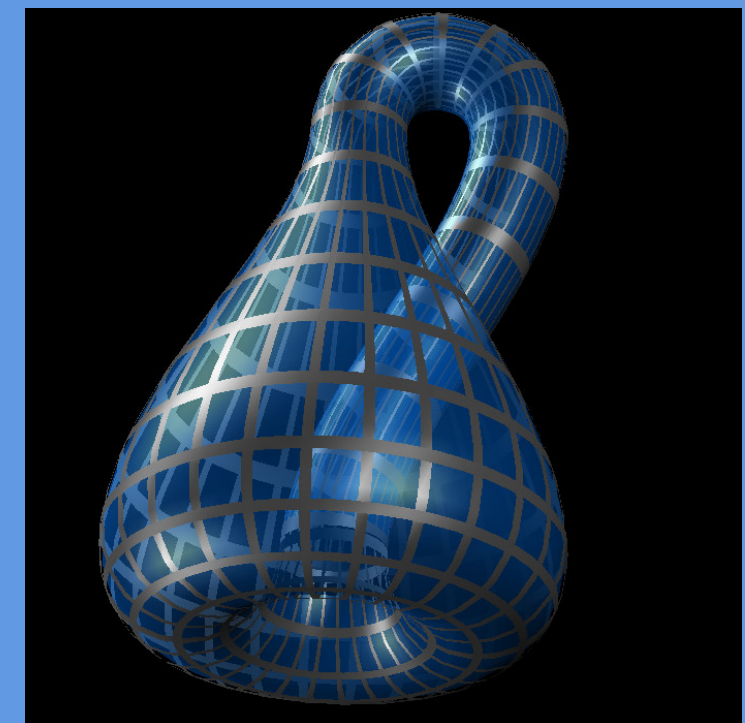
Donc une variété, c'est plus général qu'un espace affine...

Un ensemble de cartes recouvrant la variété s'appelle *un Atlas* !

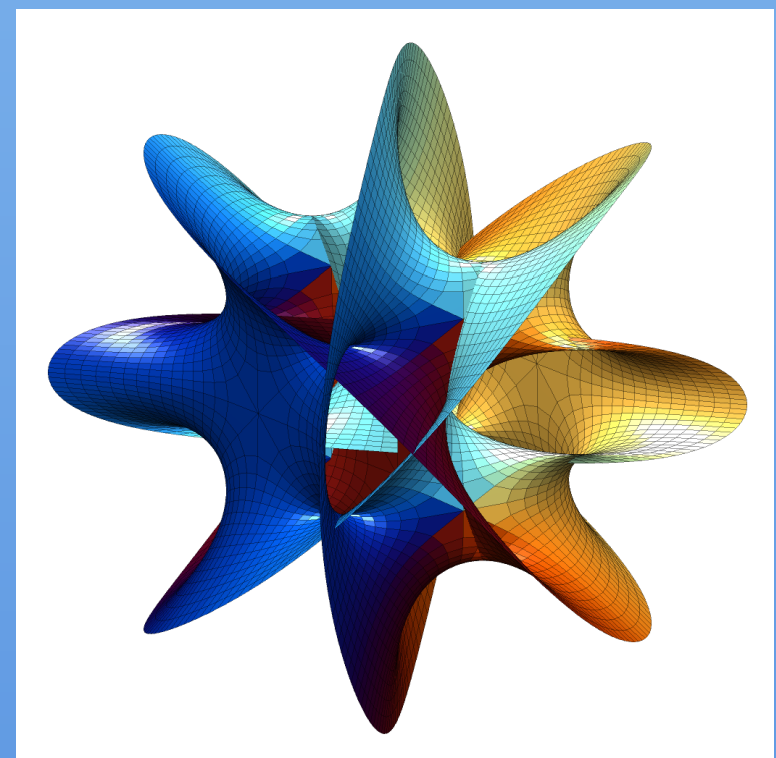
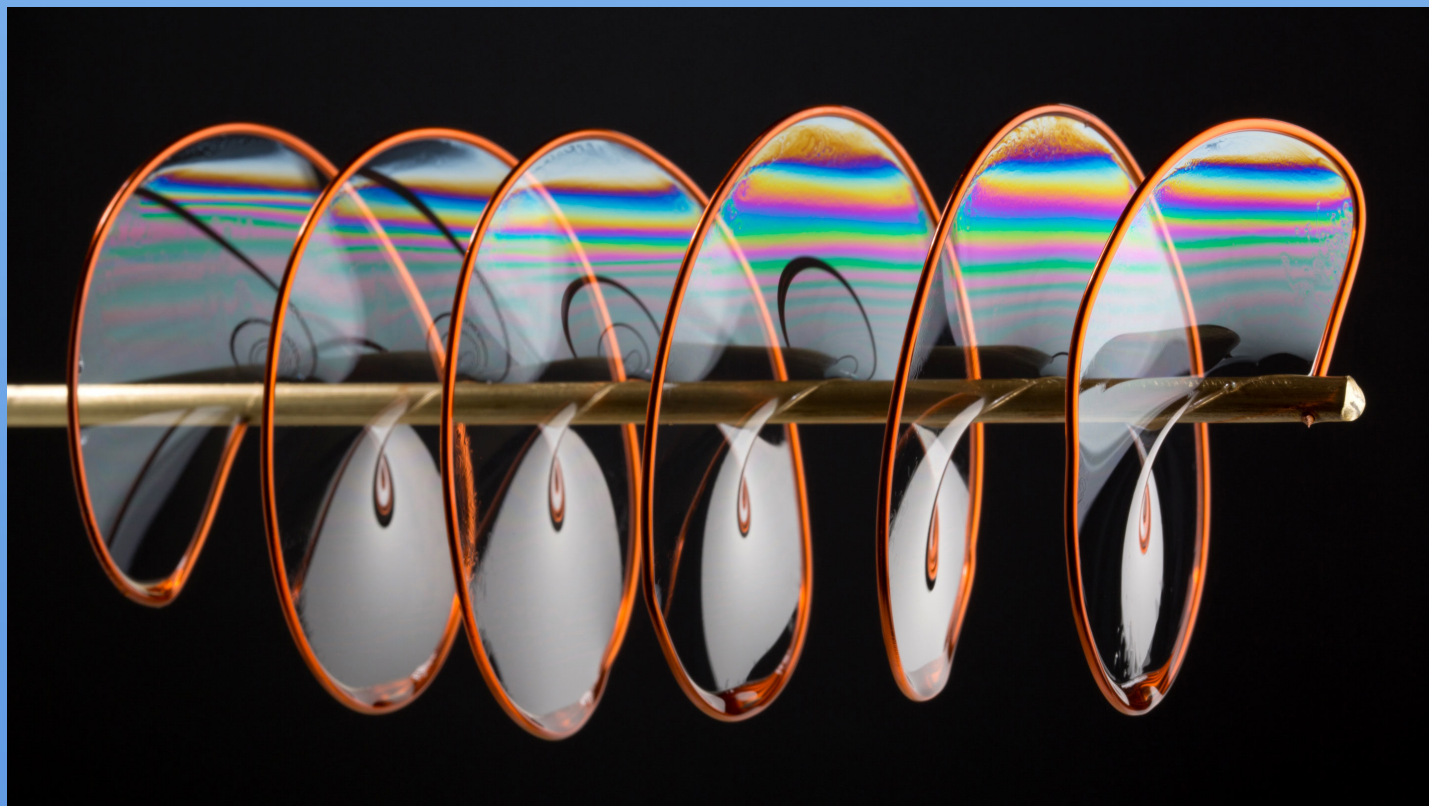
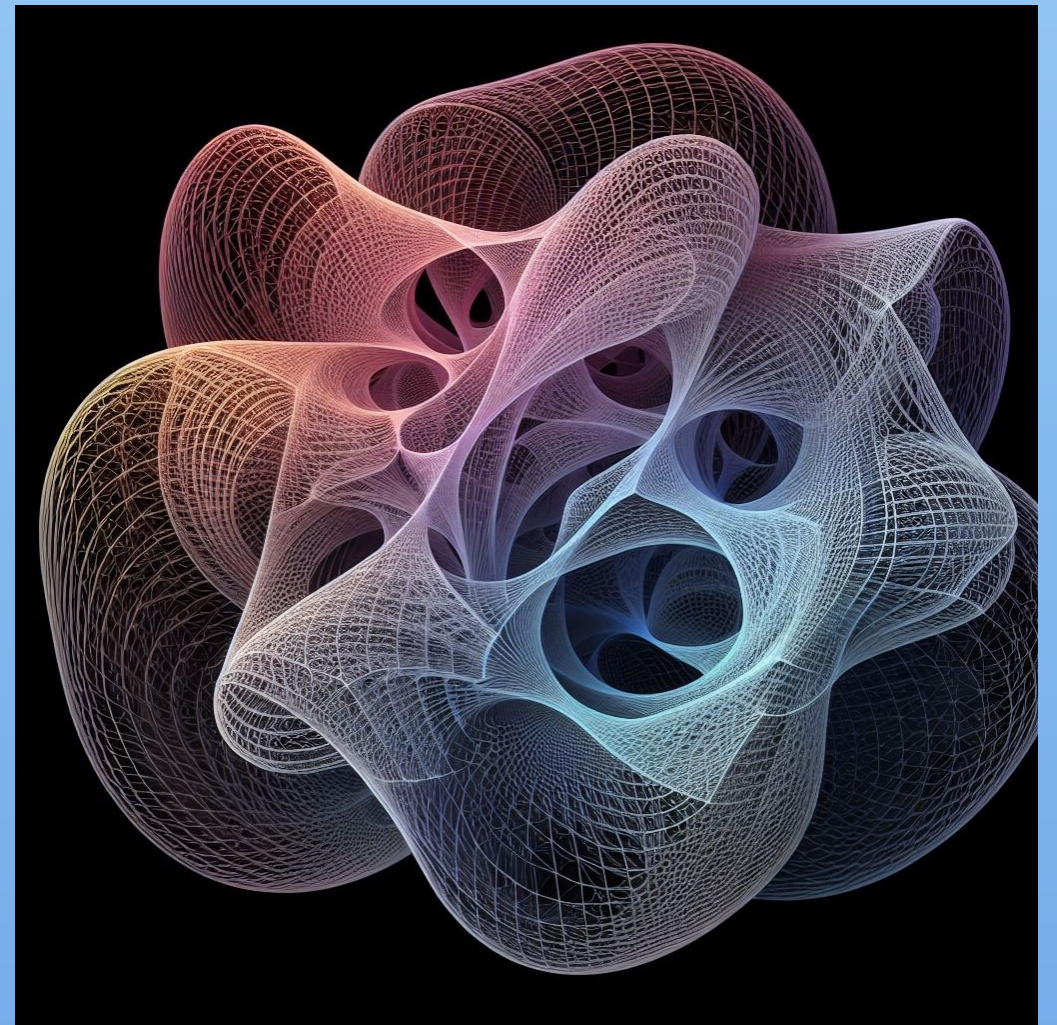
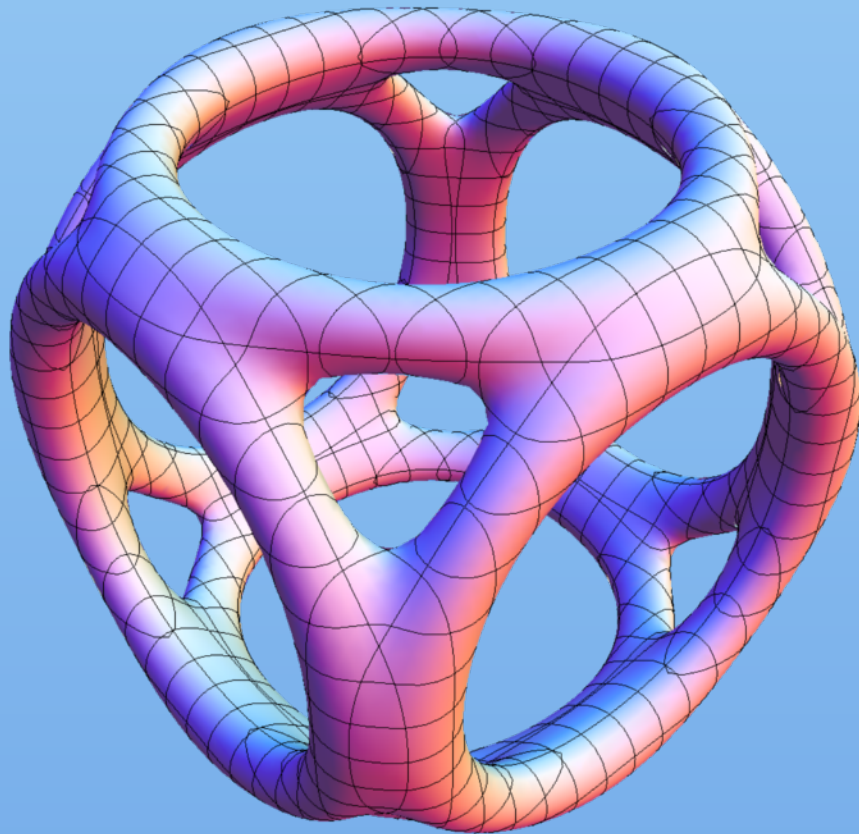


Grâce à la définition d'une variété à l'aide de cartes, il n'y a pas besoin de faire référence à un espace "extérieur", englobant la variété.

Mais on peut toujours imaginer qu'une variété vit dans un espace euclidien l'englobant, pourvu qu'il soit de dimension assez grande !! (Théorèmes de Whitney et Nash).

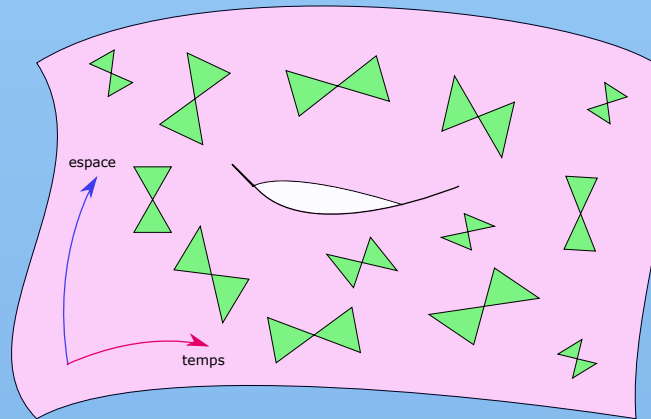


Quelques variétés...

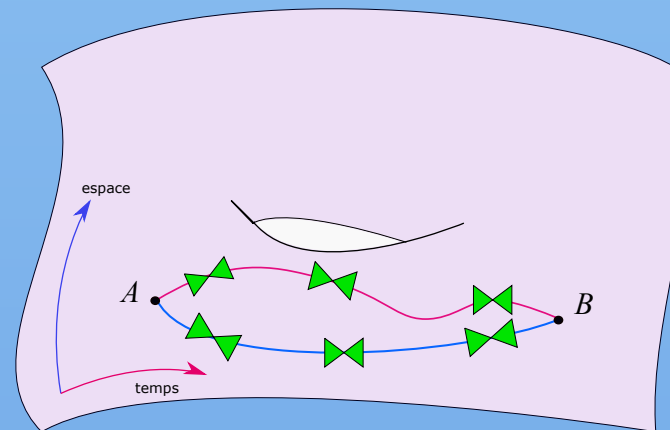


Maintenant, sur notre variété, il nous faut...

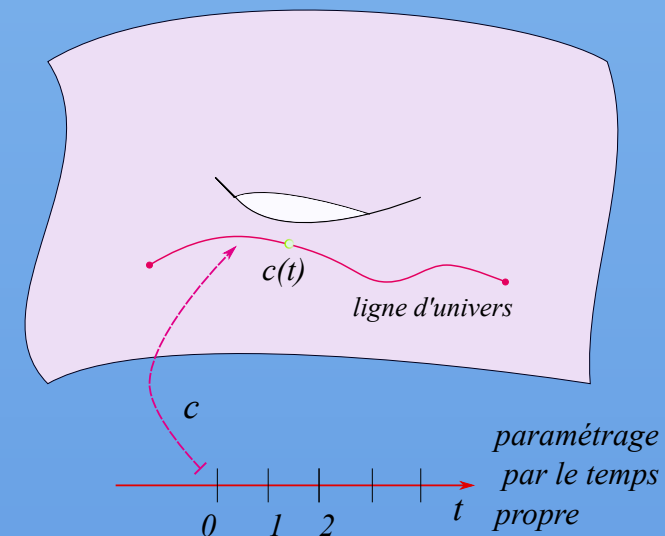
Des cônes de lumières...



Des lignes d'univers...



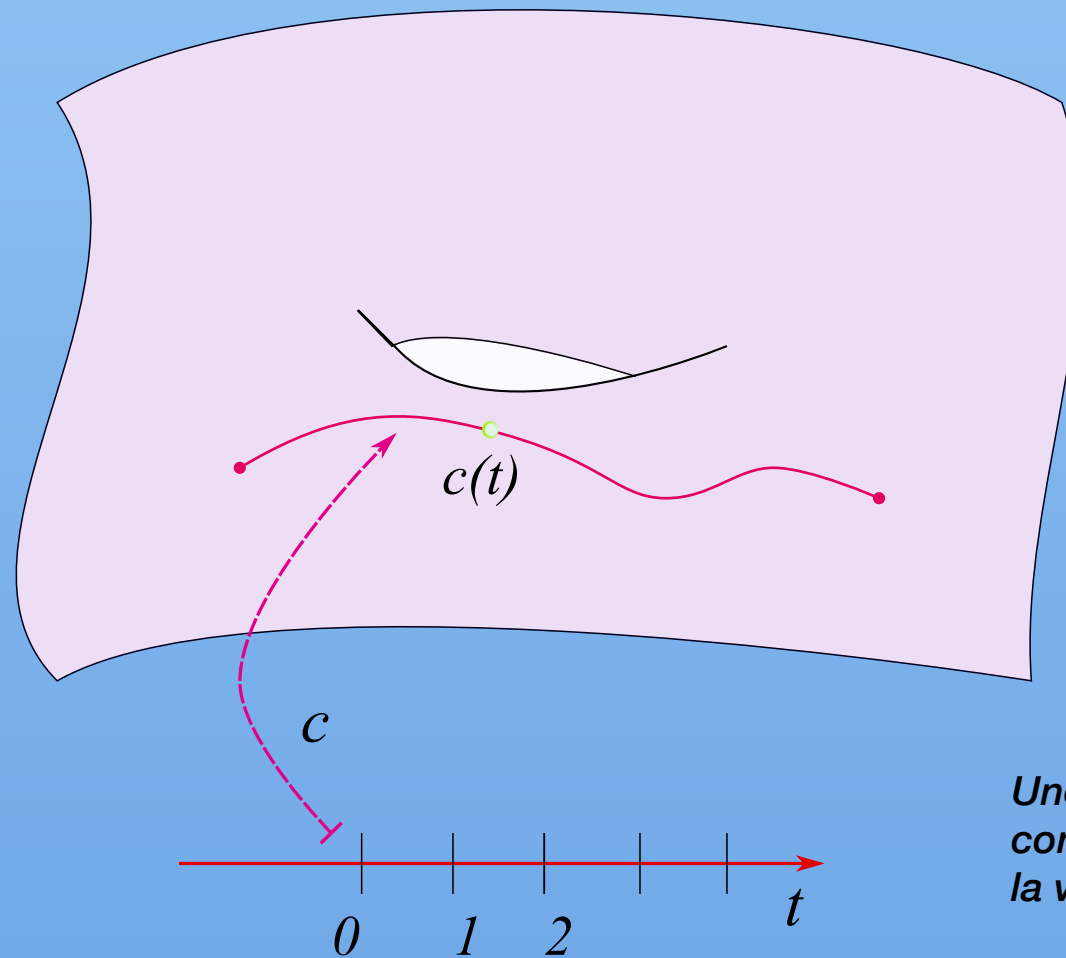
Une mesure du temps propre...



Voyons un « bref » aperçu des objets développés par les mathématiciens pour y parvenir...

On commence par tracer des courbes sur notre variété...

Pour explorer une variété, on y trace des courbes...



Une courbe c est une fonction qui repère les positions successives d'un point à l'aide d'un paramètre.

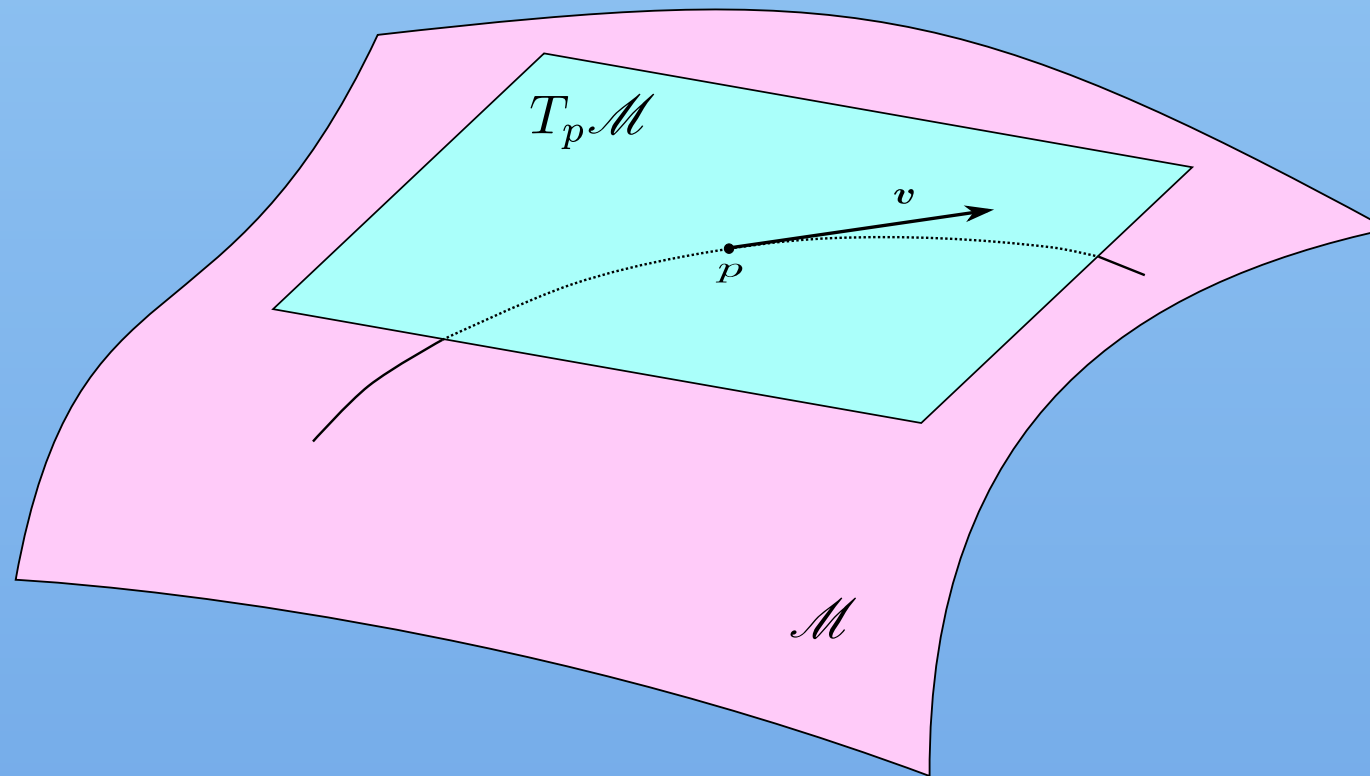
Une courbe, c est une fonction continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans la variété.

Certaines de ces courbes seront bien sûr nos lignes d'univers des objets physiques...

Un espace de vecteurs en chaque point...

Pour pouvoir utiliser *Pythagore*, ou *Pythagore modifié*, il nous faut des espaces de vecteurs...

Les vecteurs tangents et l'espace tangent :

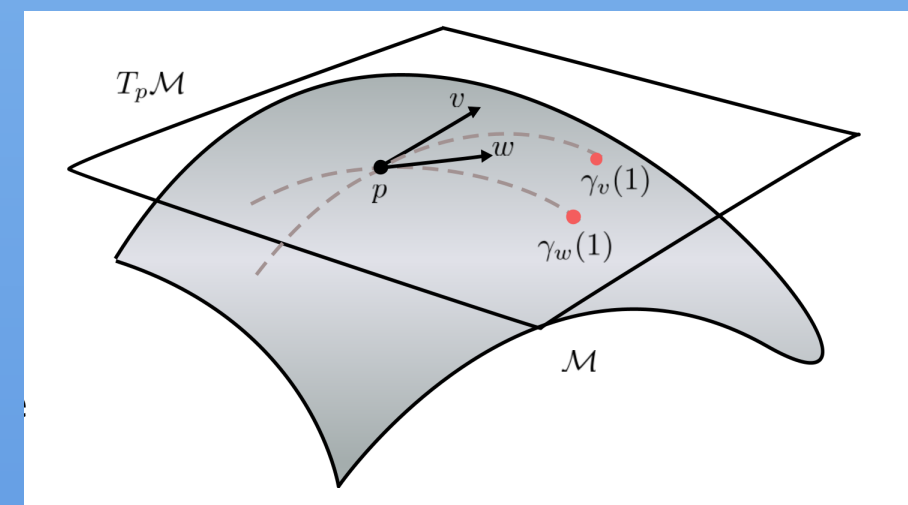


- Avec les courbes et les cartes, on définit des vecteurs tangents aux courbes, (leur « vecteurs vitesse »), et donc en chaque point *un espace tangent, qui est un espace vectoriel*.

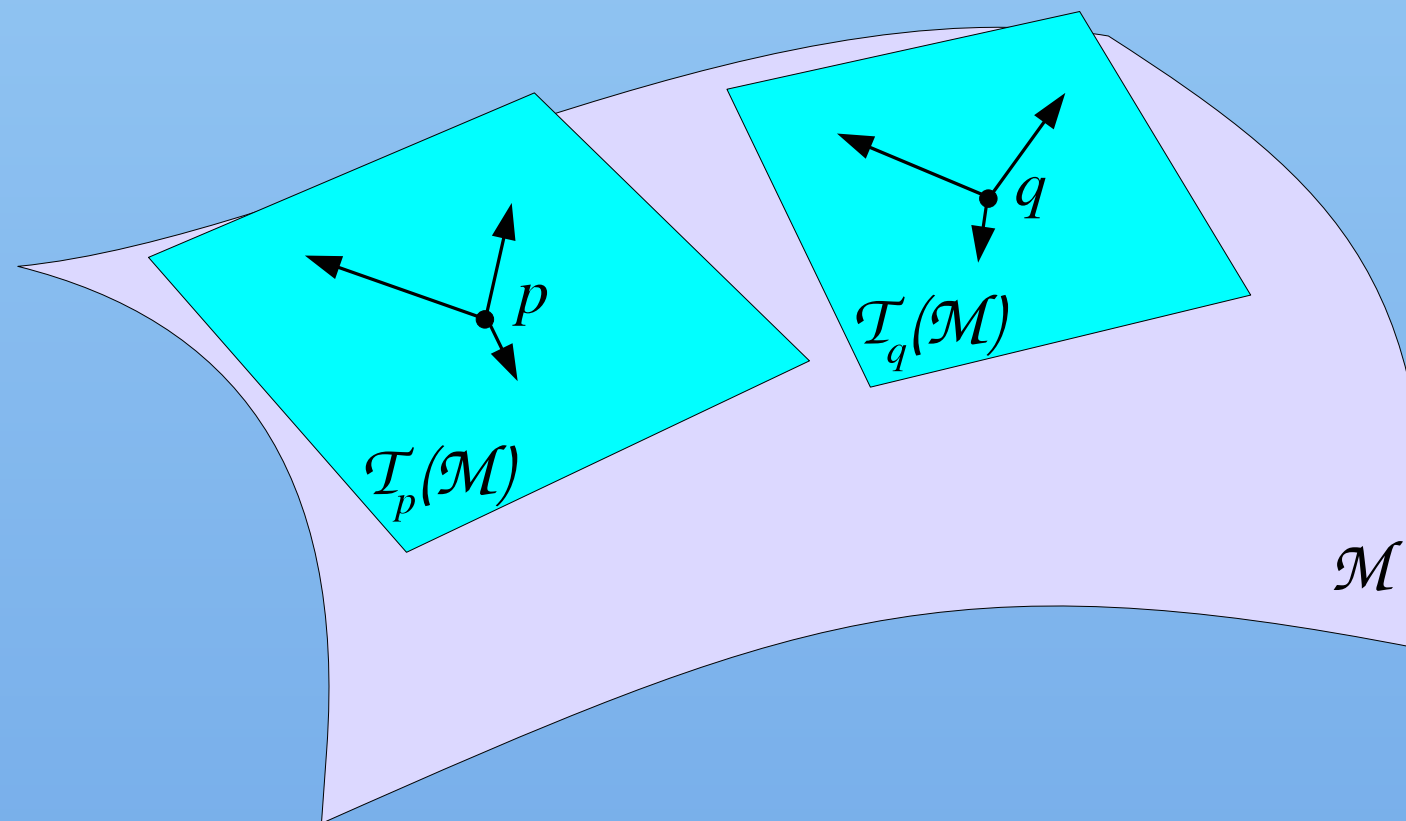
- Intuitivement : le vecteur tangent en p c'est une flèche qui donne la direction et "l'intensité" de la vitesse de la courbe en p .

- On regarde toutes les courbes passant par un point p : leur vecteurs vitesse vont alors « dessiner » l'espace tangent en p .

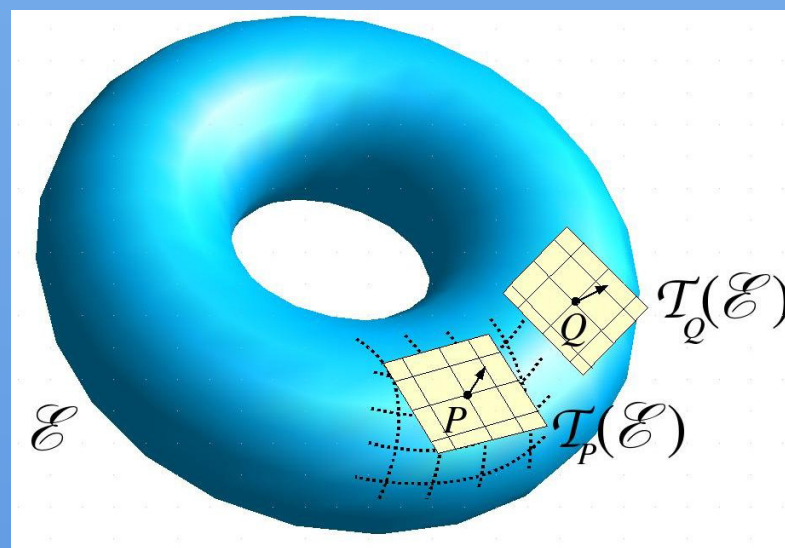
L'espace tangent est un espace Euclidien de même dimension que la variété.



On obtient un espace tangent en chaque point de la variété.
Ces espaces tangents sont des espaces Euclidiens, de même dimension que la variété.

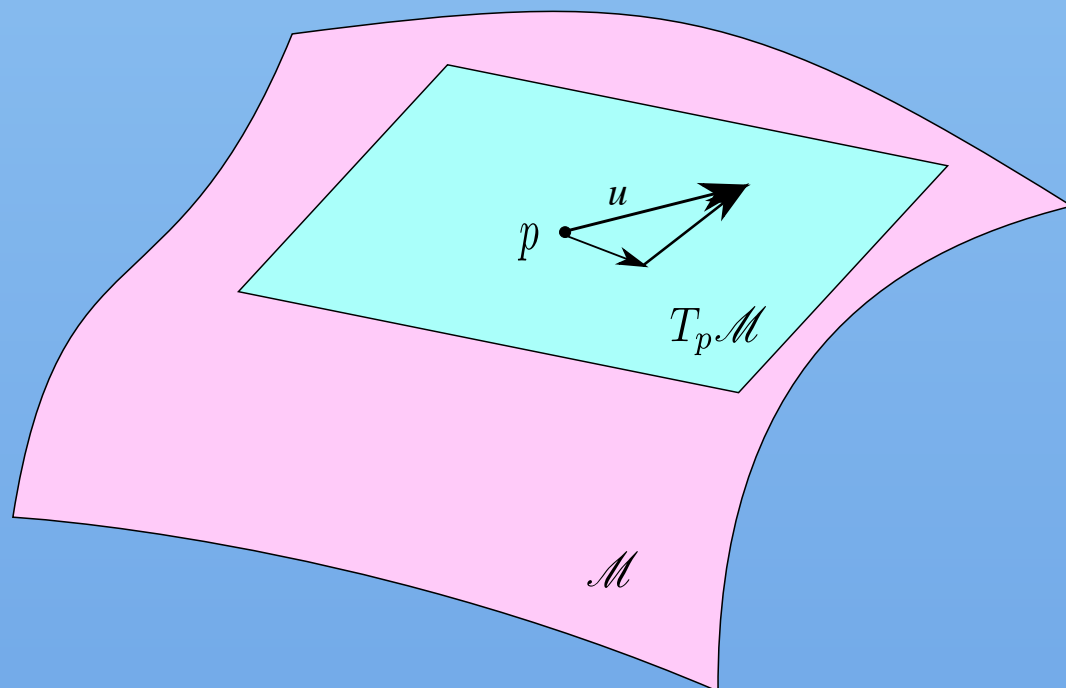


Contrairement à l'espace affine, chaque point a son propre espace de vecteurs,
ces espaces tangents sont indépendants...



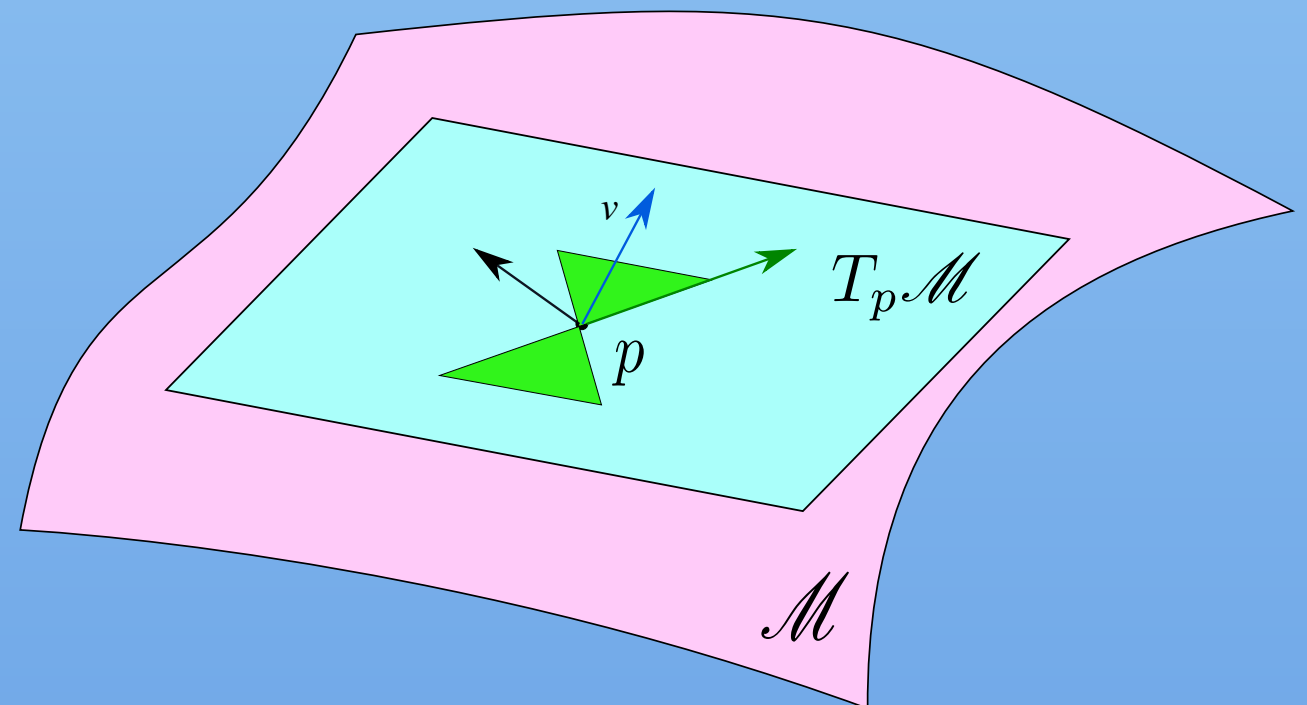
Puisqu'un espace tangent est un espace Euclidien,
pour mesurer les vecteurs de cet espace, on peut...

Utiliser Pythagore...



$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

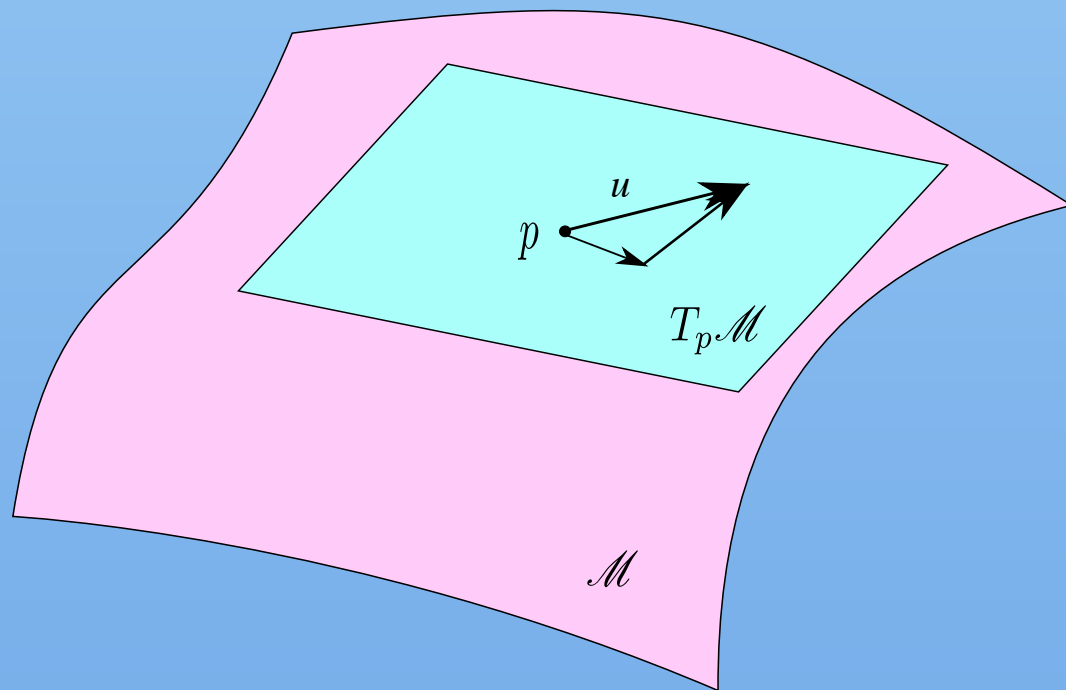
Ou utiliser Minkowski...



$$|v| = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - t^2|}$$

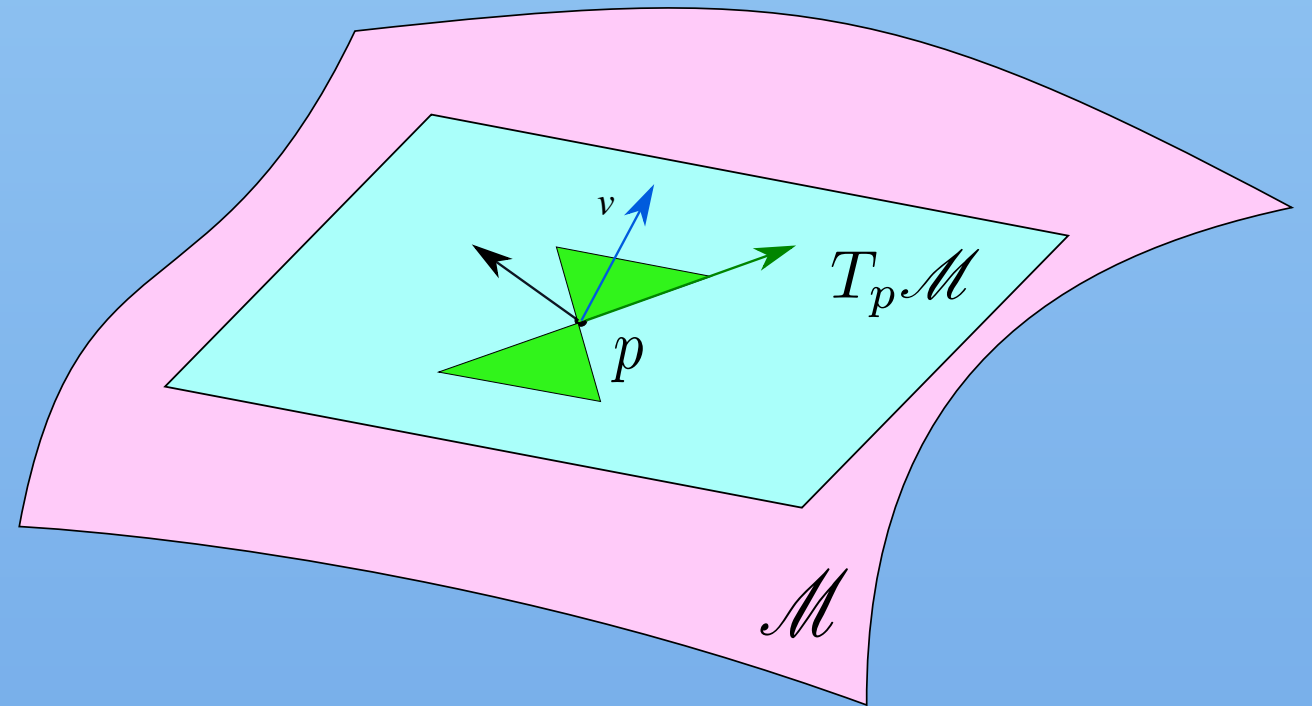
Sur chaque espace tangent, on peut...

Utiliser Pythagore...



$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

Ou utiliser Minkowski...



$$|v| = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - t^2|}$$

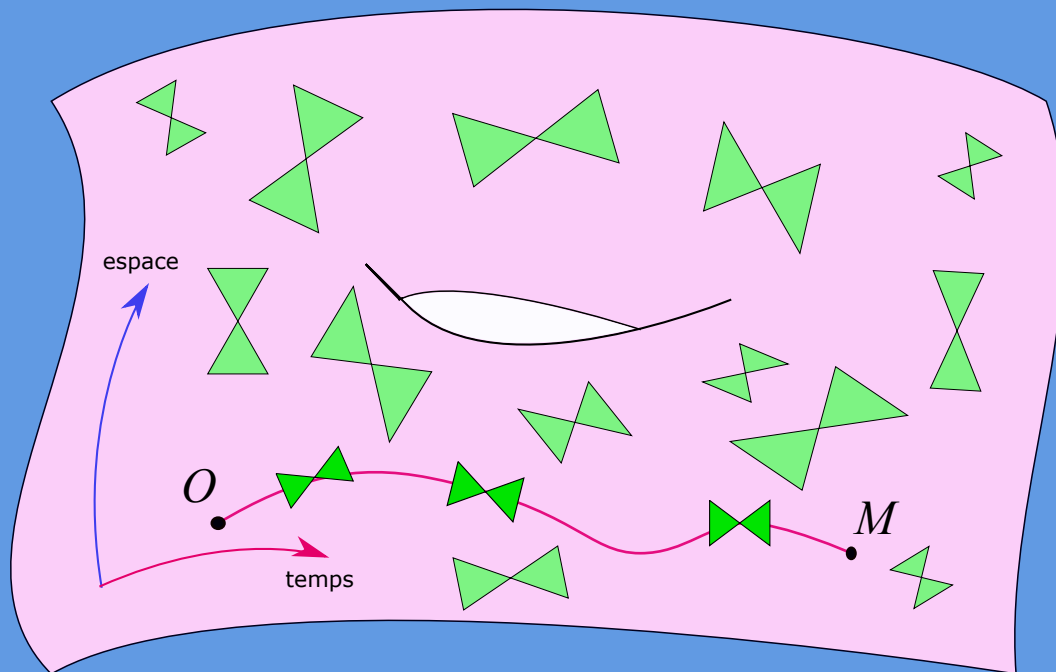
Si on fait le même choix, de manière « régulière », *sur chaque espace tangent*,
on définit ce qu'on appelle une métrique.

On peut donc mesurer les (pseudo-) longueurs des vecteurs tangents en chaque point...

Si on utilise Minkowski sur chaque espace tangent, on obtient
un cône de lumière en chaque point.
Ça donne un espace-temps courbe...

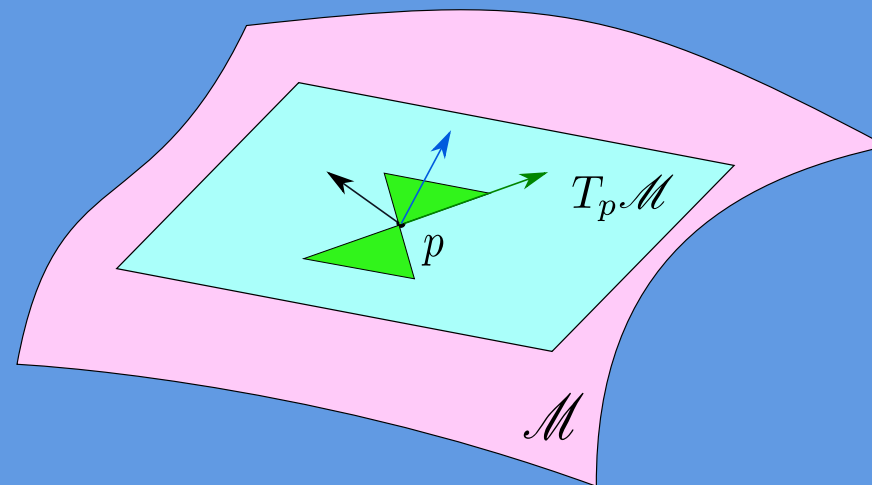
L'espace-temps avec gravitation :

- L'espace-temps avec gravitation est un espace géométrique de dimension 4 et de forme quelconque, une variété, sur laquelle on trace, en chaque point, un cône de lumière.
- Les courbes de genre temps sont les courbes qui passent en chaque point à l'intérieur des cônes de lumière; on postule que ce sont les lignes d'univers des objets physiques.
- La lumière suit des courbes de genre lumière particulières, des géodésiques, qu'il faut définir...

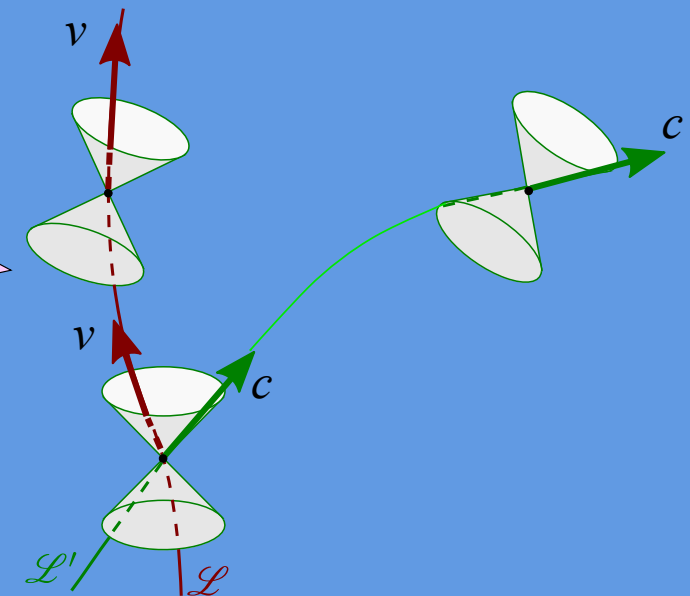


Un espace courbe, avec un cône de lumière en chaque point. Les espaces tangents sont indépendants les uns des autres, et la variété étant courbe, les cônes ne sont plus tous "alignés".

Ici, on a fait un dessin d'espace-temps à 2 dimensions ! Une de temps et une d'espace. Il manque donc 2 dimensions spatiales !!



En chaque point, un cône. Donc en chaque point des vecteurs de genre temps, lumière ou espace...
« Localement », via l'espace tangent, l'espace-temps « courbe » ressemble à celui de la relativité restreinte...

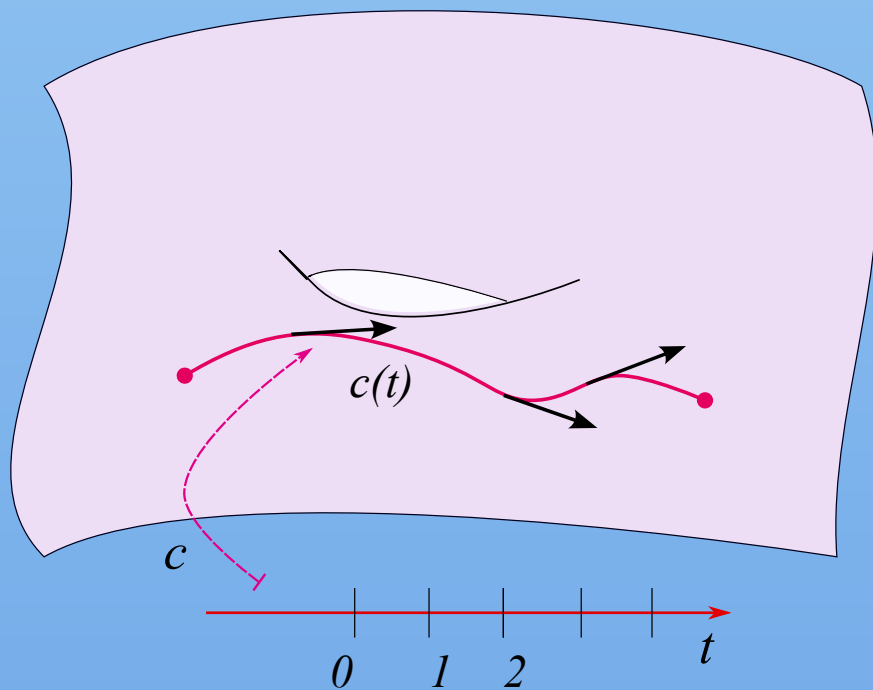


Une courbe de genre temps (en rouge) reste toujours à l'intérieur de ses cônes de lumière (précisément, ses vecteurs vitesse sont tous de genre temps). Une courbe de genre lumière (en vert) est, intuitivement, sur les bords de ses cônes.

Remarque : Le vecteur vitesse d'une ligne d'univers dans l'espace-temps n'est pas la vitesse dans l'espace de l'objet qu'elle représente (il faudrait d'ailleurs dire par rapport à quel observateur) : ce vecteur est la vitesse de l'objet dans l'espace-temps, on parle de quadri-vitesse. Un objet "immobile" dans l'espace « avance » dans le temps.

La métrique, l'outil magique de Riemann.

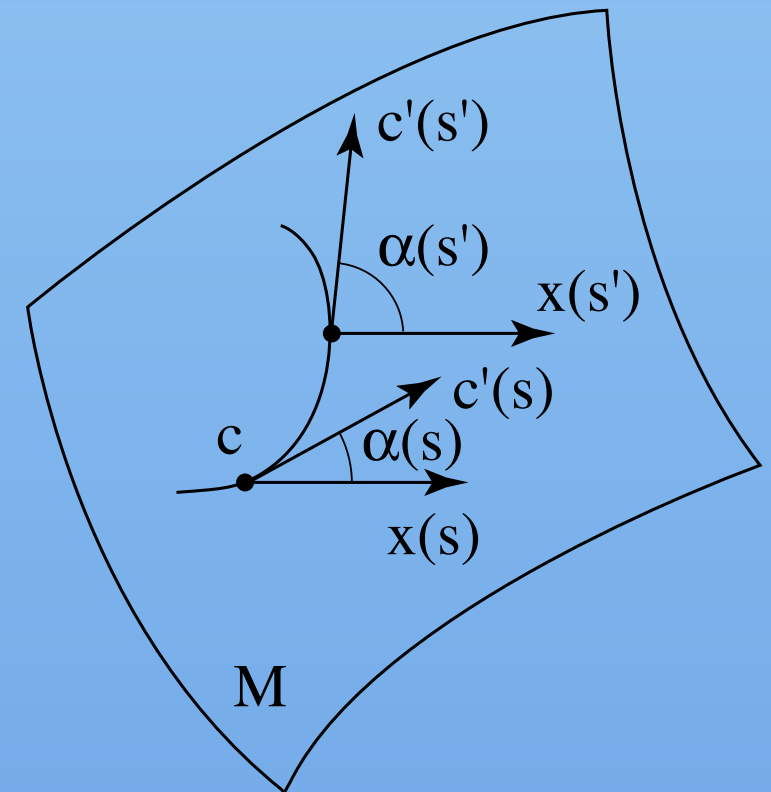
- Une métrique, c'est une fonction sur la variété qui permet de mesurer en chaque point la *pseudo-longueur* des vecteurs tangents, ainsi que l'*angle* que font entre-eux deux vecteurs au même point.
- On peut alors avec cette métrique calculer la (pseudo-) longueur d'une courbe, mais aussi son accélération...



$$L(c) = \int_0^b |\dot{c}(t)| dt$$

La (pseudo-) longueur d'une courbe, c'est l'intégrale de la (pseudo-) longueur de ses vecteurs vitesses...

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{r_a}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1 - \frac{r_a}{r})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$



$$\ddot{c}(t) = \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(t)$$

L'accélération d'une courbe c'est le taux de variation de son vecteur vitesse...

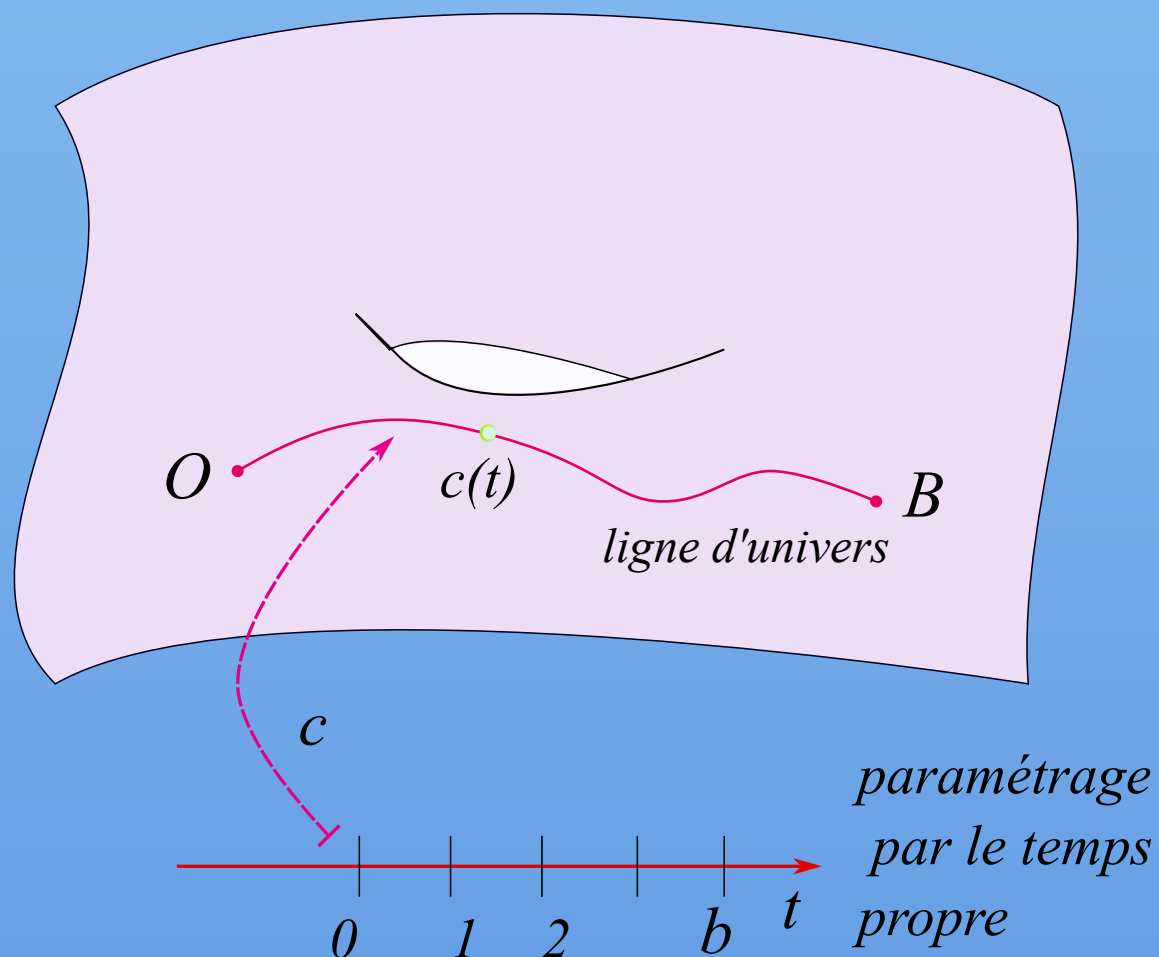
La subtilité mathématique, c'est qu'il faut définir comment une courbe « tourne » au sein d'un espace « courbe », et en plus comparer des vecteurs tangents vivant dans des espaces tangents différents...

Malgré des subtilités techniques, retenir que (pseudo-) longueur et accélération correspondent aux notions intuitives. « Quand on intègre les vecteurs vitesse, on obtient la distance parcourue, quand on dérive les vecteurs vitesse, on obtient l'accélération ».

La définition géométrique du Temps propre dans l'espace-temps courbe.

Un espace-temps est, par définition, une variété où on utilise Pythagore modifié sur chaque espace tangent. On mesure alors des pseudo-longueur des vecteurs tangents. Généralisant la définition de la relativité restreinte :

La pseudo-longueur d'une courbe de genre temps entre deux événements, c'est le temps propre écoulé entre ces deux événements, mesuré par l'observateur dont cette courbe est la ligne d'univers.



La pseudo-longueur d'une ligne d'univers de genre temps entre deux points donne **le temps propre** écoulé entre les deux événements correspondants. On peut ainsi repérer chaque point d'une telle courbe par le temps propre écoulé depuis une origine choisie. Les mathématiciens l'écrivent :

$$\tau(O, B) = \int_0^b |\dot{c}(t)| dt$$

Les géodésiques.

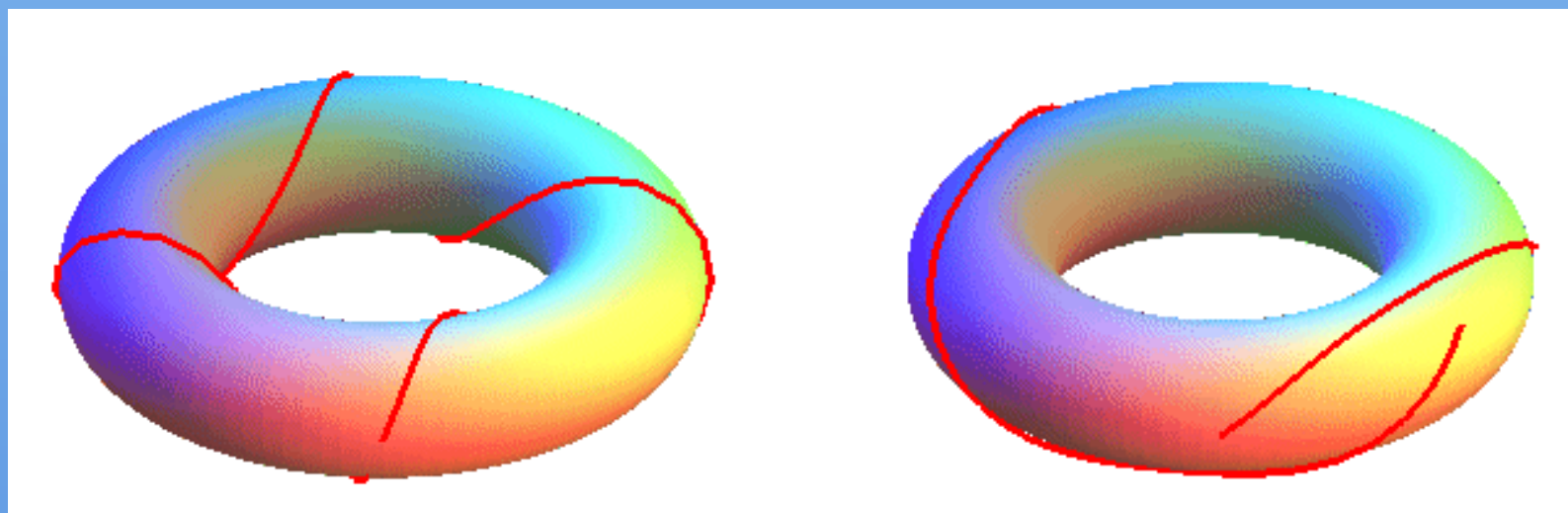
L'accélération d'une courbe, c'est le taux de variation de son vecteur vitesse d'un point à un autre. C'est grâce à la métrique qu'on calcule ce taux.

Une géodésique est une courbe d'accélération nulle.

Une géodésique se contente de suivre les creux et les bosses de la variété, comme une bille qui roule sans frottement ni glissement. Ce sont les courbes naturelles de la variété, dont le cheminement n'est dicté que par la forme de la variété...

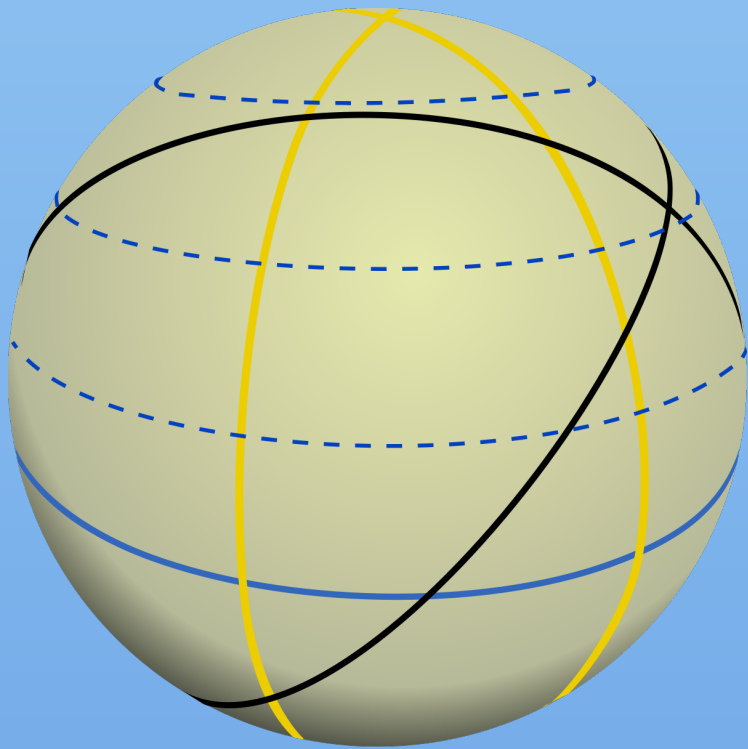
En effet, l'accélération doit se mesurer au sein de la variété où la courbe vit, sans faire référence à un quelconque espace extérieur englobant la variété. Si on considère que la variété est plongée dans un espace ambiant, on demande que l'accélération de la courbe par rapport à la variété (accélération tangentielle) soit nulle, même si l'accélération par rapport à l'espace ambiant (accélération normale) ne l'est pas. Une droite dans un espace euclidien est une « courbe » qui n'accélère pas ; c'est en ce sens que les géodésiques généralisent la notion de droite aux espaces courbes.

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c}(t) \equiv 0$$



Géodésiques et longueur, avec Pythagore...

Si on utilise Pythagore sur les espaces tangent, une géodésique, courbe d'accélération nulle, est, sous des hypothèses raisonnables, le plus court chemin entre deux points.



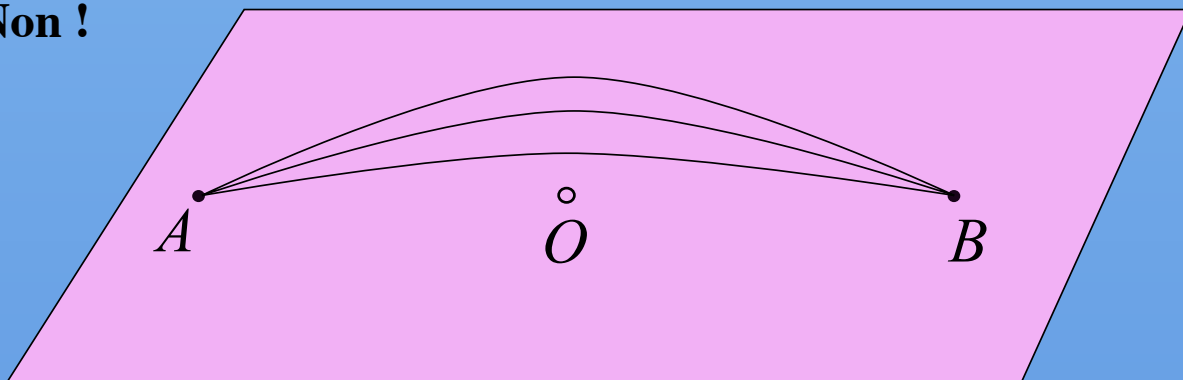
L'équation des géodésiques.

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0$$

Mais il y a des pièges...

Existe-t-il toujours un plus court chemin entre deux points ?

Non !



S'il y a un trou dans la variété, (ici on a retiré le point O), il peut ne pas y avoir de plus court chemin...

Existe-t-il un seul plus court chemin entre deux points ?

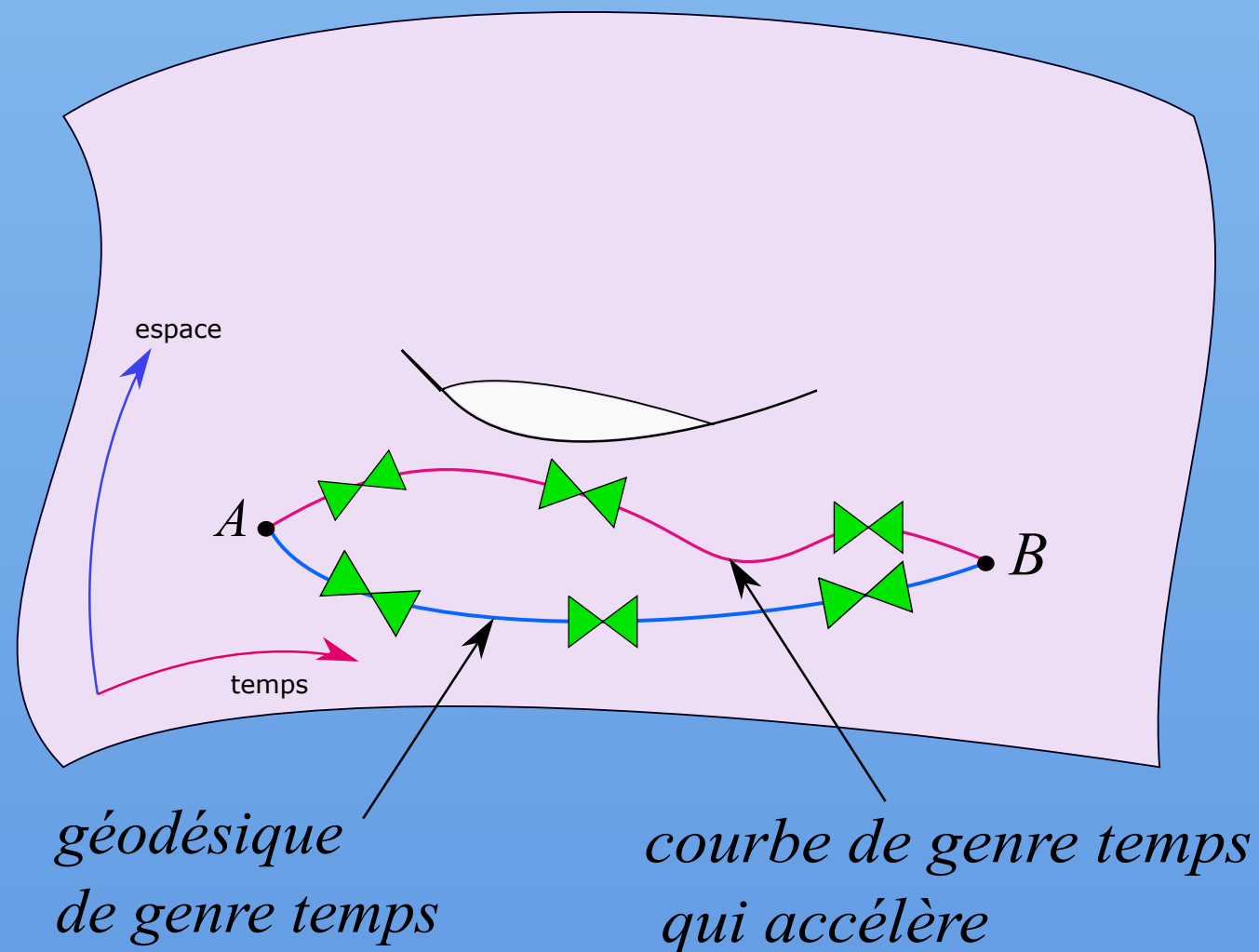
Non !

Sur une variété, il peut y avoir plusieurs géodésiques, voire une infinité, entre deux points ; le plus court chemin entre deux points n'est pas forcément unique ! Sur la terre par exemple, tous les méridiens allant du pôle nord au pôle sud sont des géodésiques.

Les géodésiques de l'espace-temps.

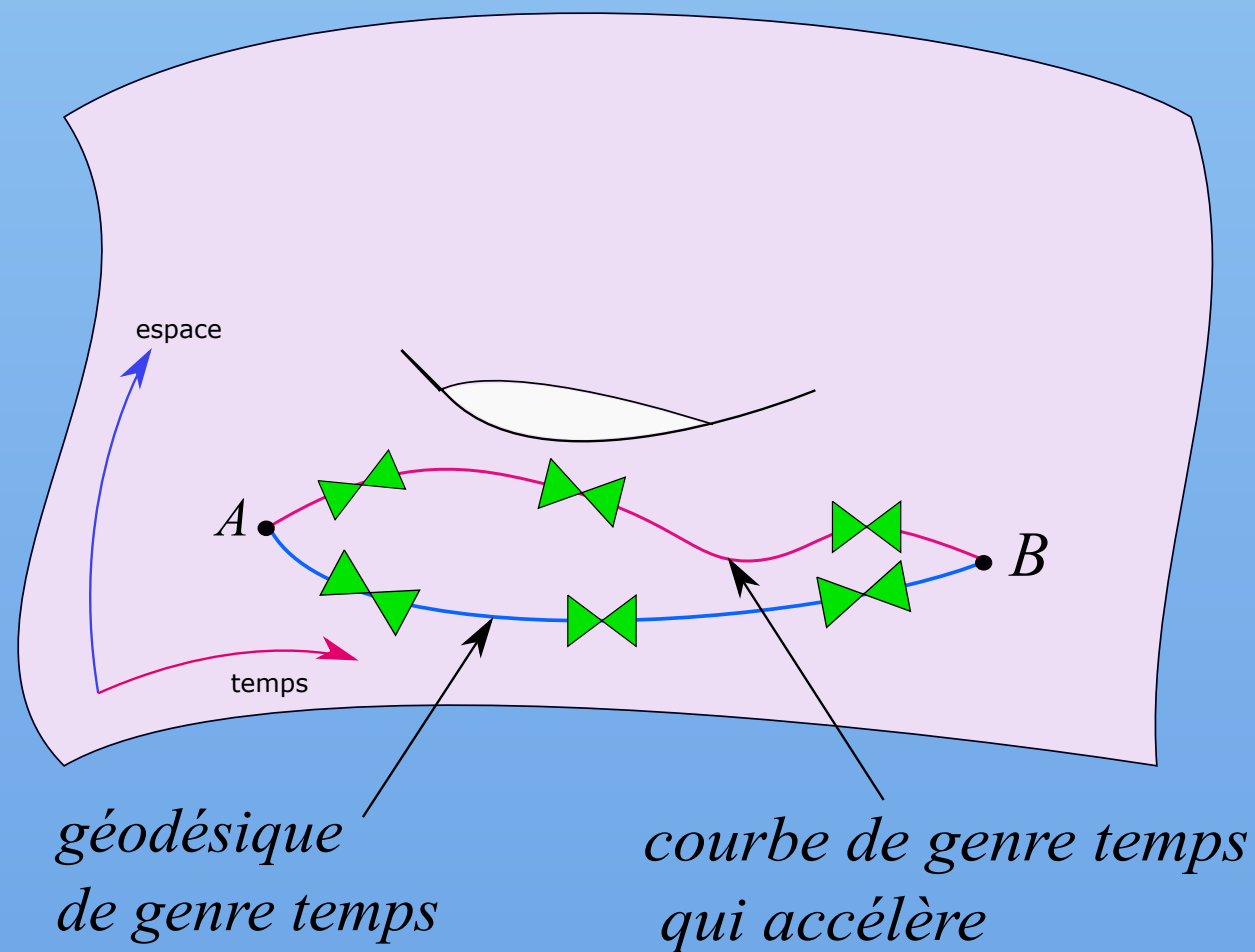
Les postulats de la relativité générale :

- 1/ Un espace-temps est une variété de dimension 4 où on utilise Minkowski sur chaque espace tangent.
- 2/ Les corps massifs libres (soumis uniquement à la gravitation) suivent les géodésiques de genre temps.
- 3/ La lumière suit les géodésiques de genre lumière.



Géodésiques et pseudo-longueur :

Avec Minkowski, on obtient une nouvelle géométrie !



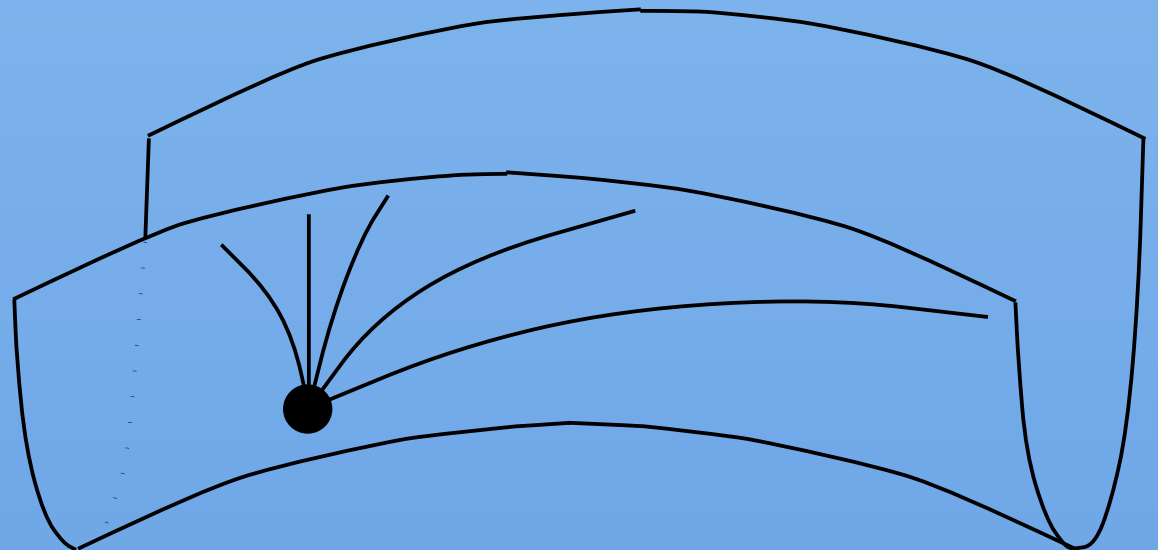
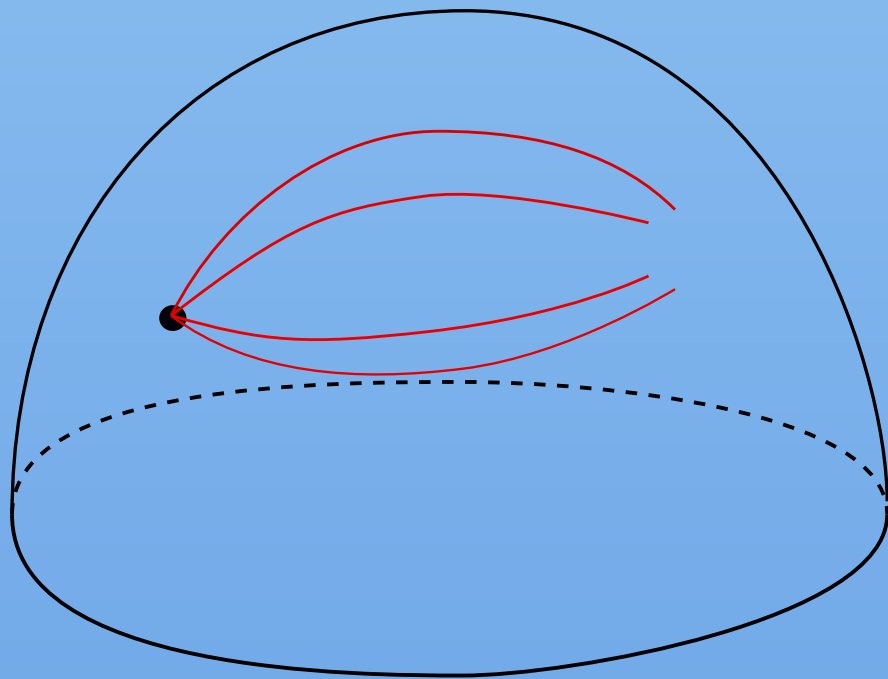
Une géodésique de genre temps est le plus (pseudo-) long chemin entre deux événements de la variété espace-temps.

C'est le paradoxe des jumeaux dans l'espace-temps courbe.

La vie des Géodésiques...

- *Mais comment se comportent les géodésiques les unes par rapport aux autres ?*
- *Où vont-elles ?*

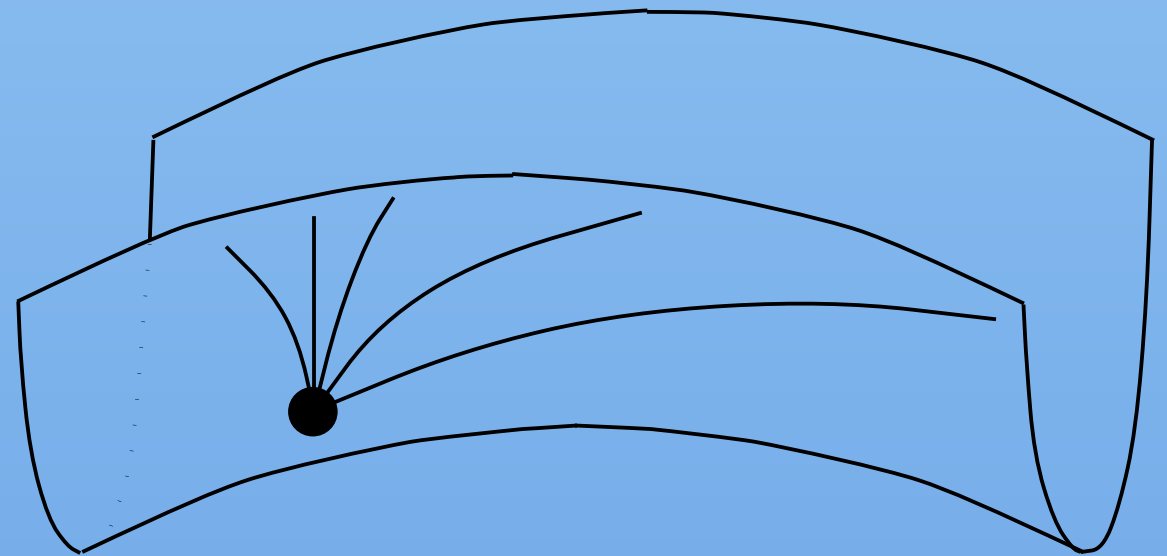
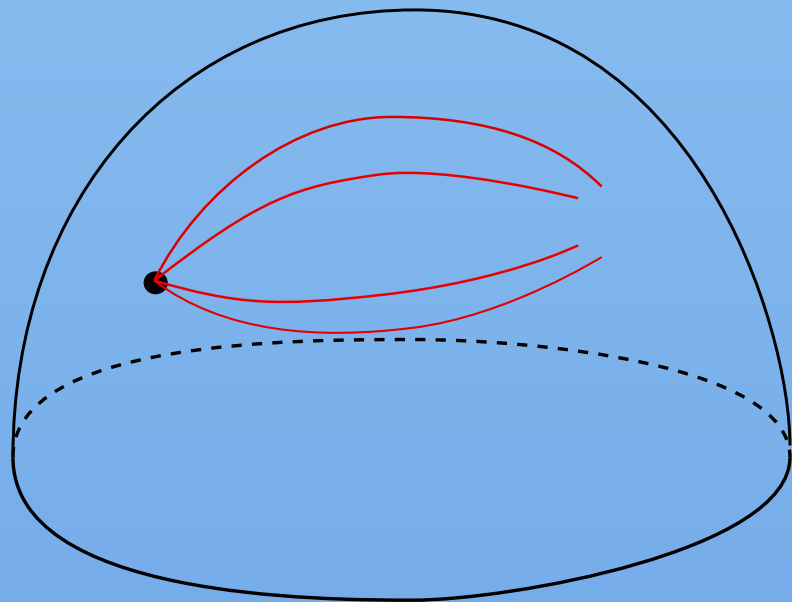
Ça dépend de la « forme » de la variété...



Il nous manque donc un dernier ingrédient géométrique fondamental...

La courbure de l'espace-temps...

La courbure, c'est la mesure du taux de dispersion ou de rapprochement des géodésiques issues d'un même point.

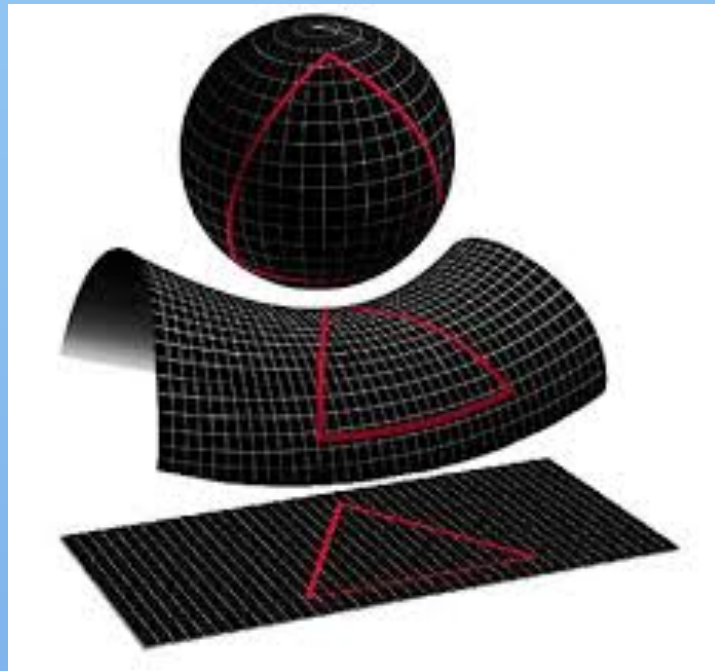


A gauche, une courbure dite positive force les géodésiques à converger.
A droite, une courbure dite négative force les géodésiques à se disperser

Puisque les géodésiques de genre temps sont les lignes d'univers des particules soumises à la gravitation, on voit que le mouvement relatif des particules soumises à la gravitation est dicté par la courbure.

Les photons suivant également des géodésiques, leur trajectoire est elle aussi dictée par la courbure...

Aperçus mathématiques.



- En dimension 2, sur les surfaces, on peut définir **la courbure** par la somme des angles d'un **triangle tracé avec des géodésiques** : supérieure à 180° en courbure positive, inférieure en courbure négative, et bien sûr égale à 180° dans le plan.

- Sur une variété de dimension supérieure à 3, la **courbure** est un objet difficile à définir (un *tenseur*).

On définit à partir de la métrique la « dérivée des champs de vecteurs », et la courbure mesure la « non-commutativité des dérivées secondes »....

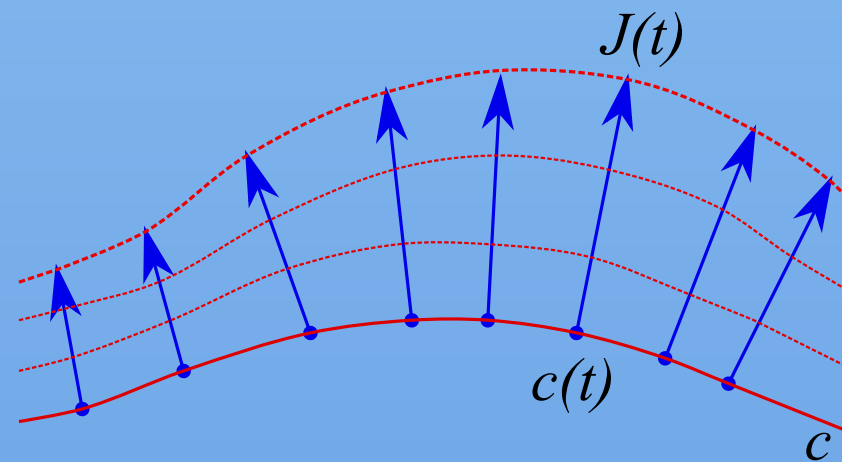
$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

- Néanmoins, on peut parler de courbure positive, négative ou nulle, dont les modèles type sont la sphère, la selle de cheval, et le plan.

Les champs de vecteurs de Jacobi :

- On repère les géodésiques dans le voisinage d'une géodésique donnée $c(t)$ par un champ de vecteurs $J(t)$ le long de c .
- Chaque géodésique représente la ligne d'univers d'une particule.
- Or l'évolution de $J(t)$ au fil de la courbe $c(t)$ est mesurée par la courbure.

Le mouvement relatif des particules est donc dicté par la courbure.



L'équation de déviation géodésique.

$$\nabla_{\partial_t}^2 J(t) - R(\dot{c}(t), J(t)) \cdot \dot{c}(t) = 0$$

↓
Taux de dispersion
des géodésiques

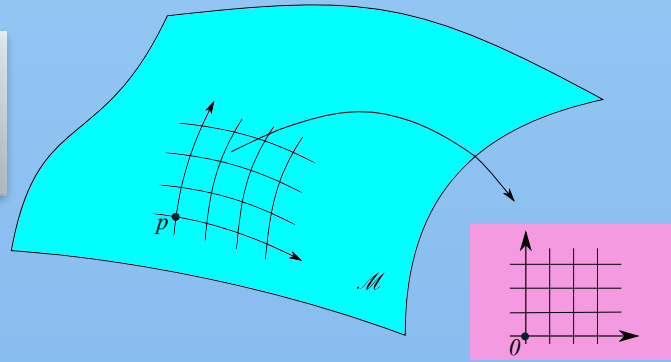
↘
Courbure

Pour se donner une idée de la complexité de la courbure, voilà sa "formule" dans une carte :

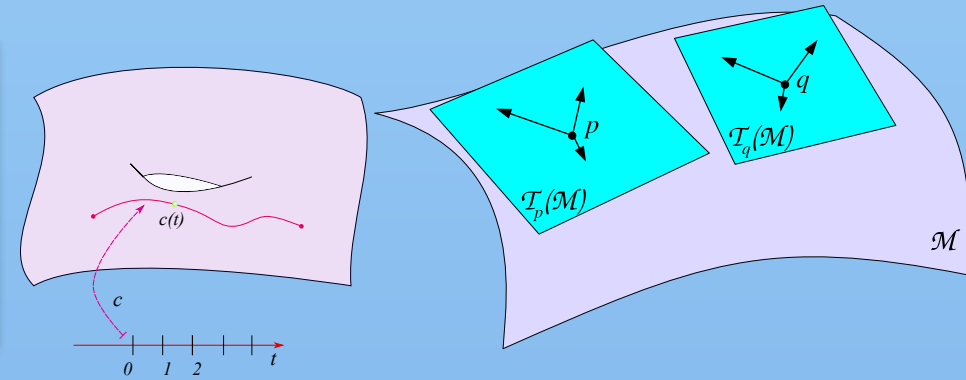
$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} := \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu} \quad \text{avec} \quad \Gamma^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$$

Pour résumer, ce qu'il faut intuitivement retenir :

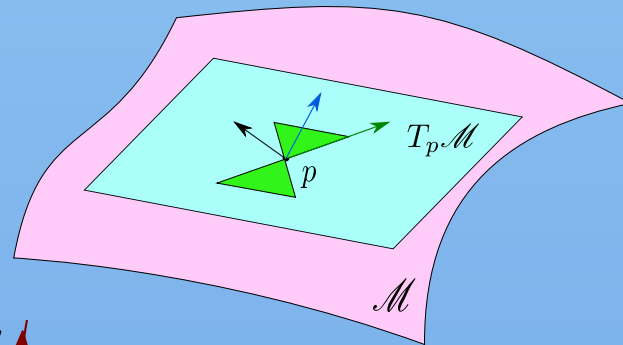
1/ On a défini des espaces courbes, les variétés :



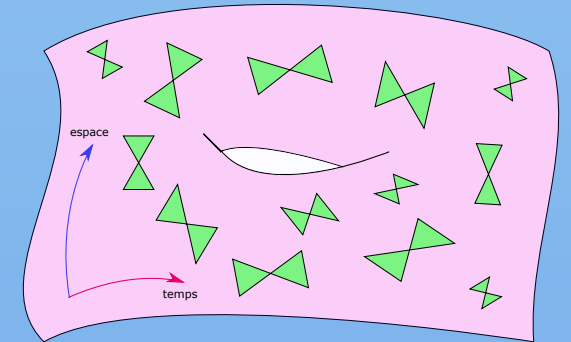
2/ Sur la variété, on trace des courbes et on utilise des cartes. En chaque point de la variété, on sait alors construire un espace euclidien, l'espace tangent :



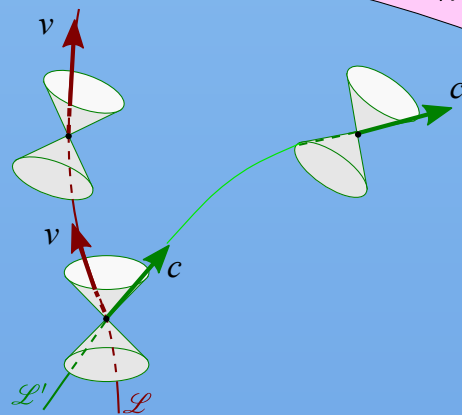
3/ Sur chaque espace tangent, on utilise pythagore modifié ; on a alors en chaque point un cône de lumière :



4/ L'espace-temps est une variété de dimension 4, sur laquelle on place en chaque point un cône de lumière.



5/ On définit alors les courbes de genre temps et lumière :

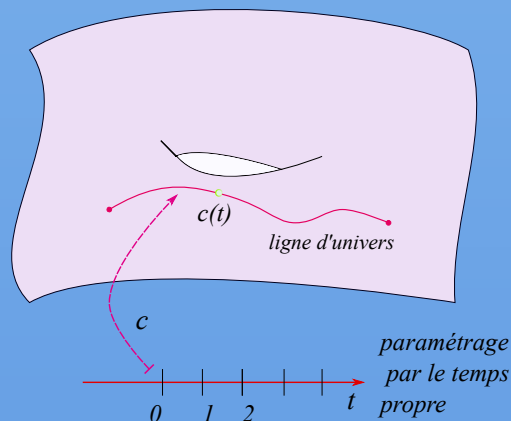


6/ Quand sur chaque espace tangent, on décide d'utiliser pythagore modifié, on obtient une métrique. La métrique permet de définir la (pseudo-) longueur et l'accélération d'une courbe tracée sur la variété.

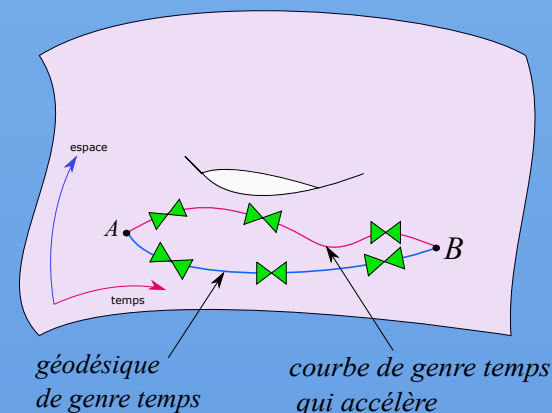
$$L(c) = \int_0^b |\dot{c}(t)| dt$$

$$\ddot{c}(t) = \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(t)$$

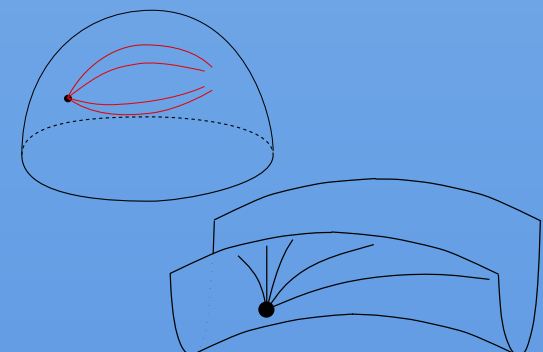
7/ La pseudo-longueur d'une courbe de genre temps, c'est le temps propre de l'objet que représente cette courbe :



8/ Une Géodésique, c'est une courbe d'accélération nulle. Les géodésiques sont les courbes naturelles d'une variété avec une métrique :



9/ La courbure, c'est une mesure du taux de dispersion des géodésiques :



La géométrie de la relativité générale

Des postulats très simples et élégants :

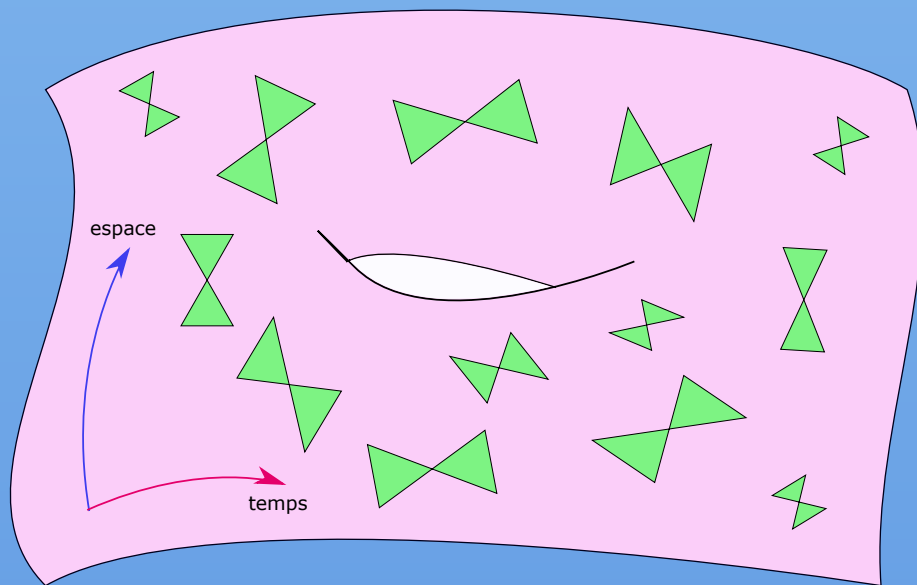
- 1 L'espace-temps est une variété différentielle de dimension 4 munie d'une métrique Lorentzienne.
- 2 Les corps libres, i.e. soumis uniquement à la gravitation, suivent les géodésiques de genre temps de l'espace-temps.
- 3 La lumière suit les géodésiques de genre lumière.

La gravitation n'est plus une force, comme chez Newton.

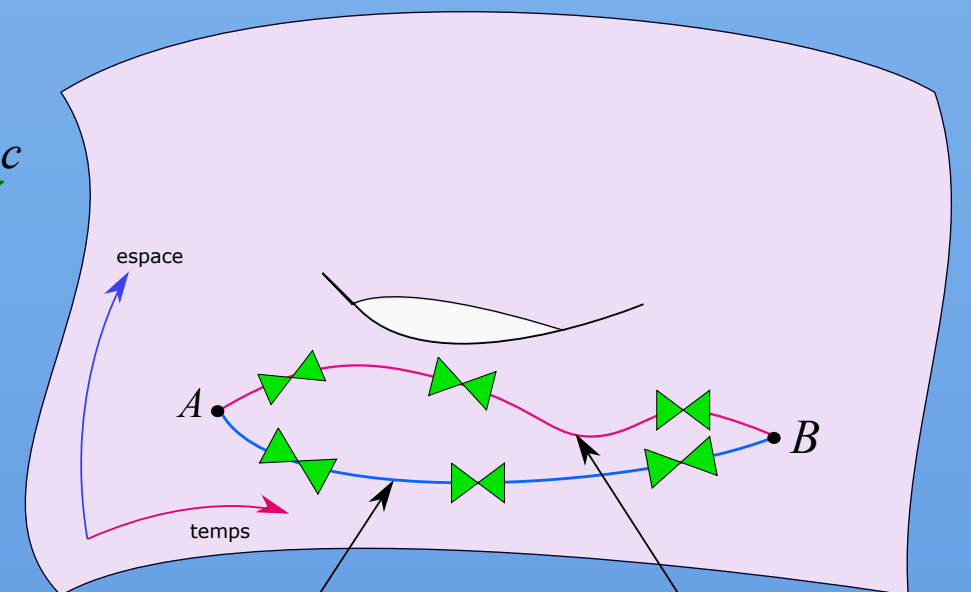
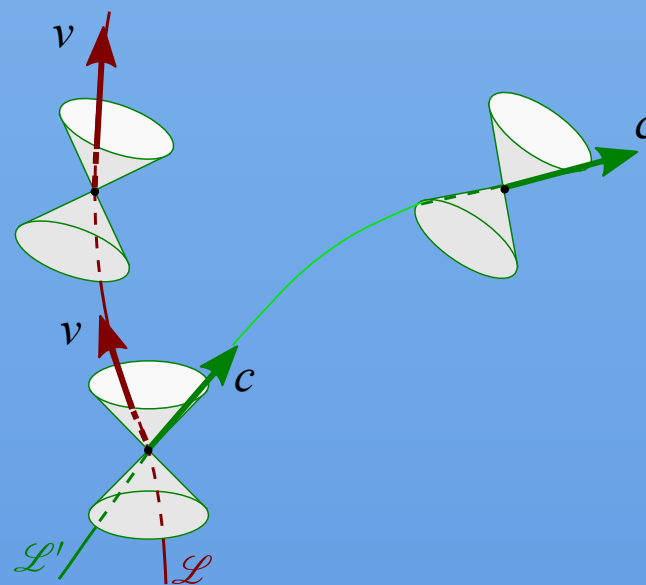
Pour Einstein, **la gravitation c'est la forme de l'espace-temps.**

C'est pourquoi un objet qui n'est soumis qu'à la gravitation est *libre*, et suit donc une *géodésique*...

Le mouvement *relatif* des objets massifs libres ou des photons est dicté par la *courbure* de la variété...



Ici, on a fait un dessin d'espace-temps à 2 dimensions ! Une de temps et une d'espace. Il manque donc 2 dimensions spatiales !!



géodésique
de genre temps

courbe de genre temps
qui accélère

*On a toute la géométrie de la relativité,
on peut faire un peu de physique...*

Le seul postulat physique : L'équation d'Einstein.

C'est l'équation qui relie la forme de l'espace-temps
à la masse et à l'énergie qu'il contient

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}S \cdot g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

Géométrie : courbure « moyenne »

Physique : masse-énergie

L'idée fondamentale : C'est la matière et l'énergie qu'il contient
qui donnent sa forme, sa géométrie, à l'espace-temps.

- L'espace-temps dit à la matière comment se déplacer.
 - La matière dit à l'espace-temps comment se courber.
- (John A Wheeler)

Mais un mathématicien peut se passer de la partie physique...

En résumé : La relativité Générale, c'est...

...

— trois postulats géométriques globaux :

- L'espace-temps est une variété de dimension 4 munie d'une métrique Lorentzienne.
- Les particules massives libres suivent les géodésiques de genre temps,
- Les photons suivent les géodésiques de genre lumière
- — un postulat physique local :
 - L'équation d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}S \cdot g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, qui relie localement la courbure au flux de matière-énergie.

- La grande idée de départ d'Einstein a été de modéliser la gravitation par la courbure de l'espace-temps.
- La courbure, nous l'avons vu, mesure le taux de dispersion ou de rapprochement des géodésiques.
- Or, les géodésiques (de genre temps ou lumière) sont les lignes d'univers des objets ou des photons soumis à la gravitation.
- Le mouvement relatif des objets ou photons soumis à la gravitation est donc bien dicté par la courbure de l'espace-temps.

- *Une simplicité formelle d'une élégance sans équivalent...*
- *On peut se passer du postulat physique pour découvrir des objets et des problèmes géométriques fascinants, qui mènent à des objets physiques extraordinaires...*

La Constante Cosmologique et l'énergie noire ...

*Aujourd'hui, on met en évidence dans l'équation d'Einstein une composante particulière, l'énergie noire.
On l'écrit alors :*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}S \cdot g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

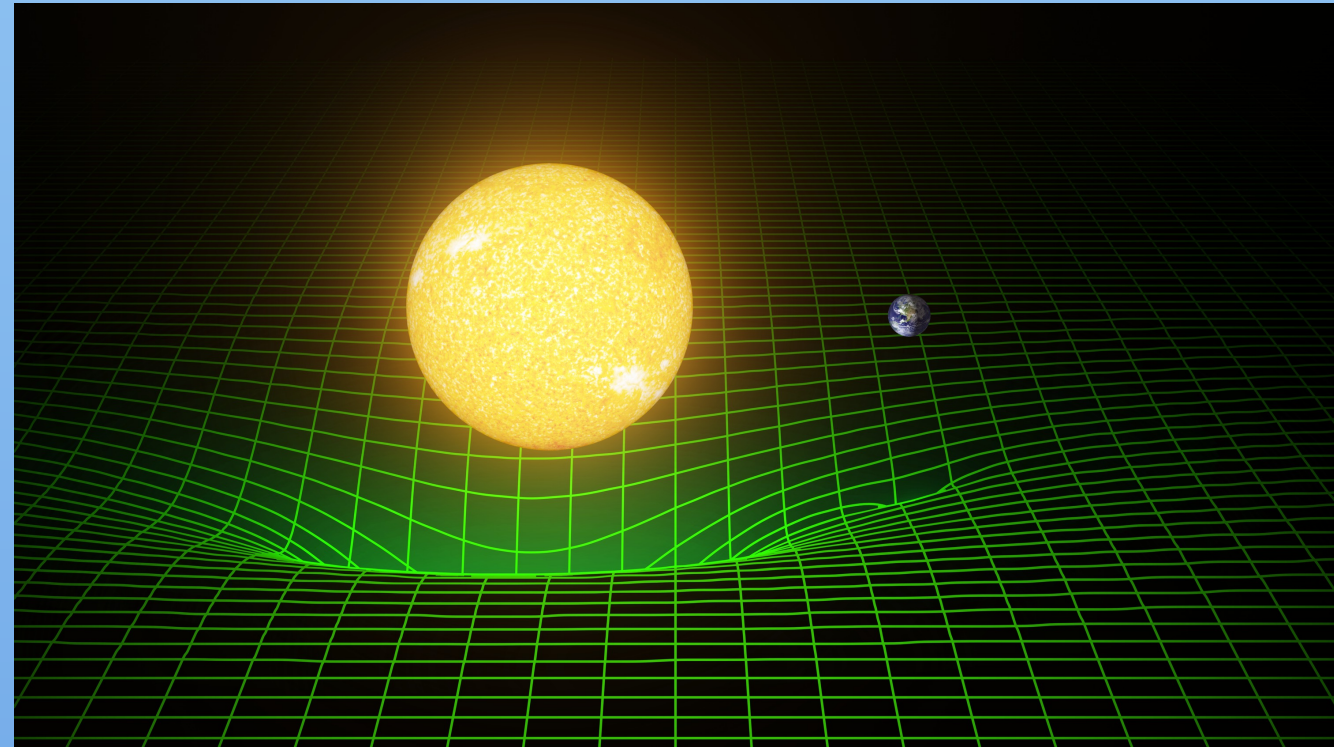
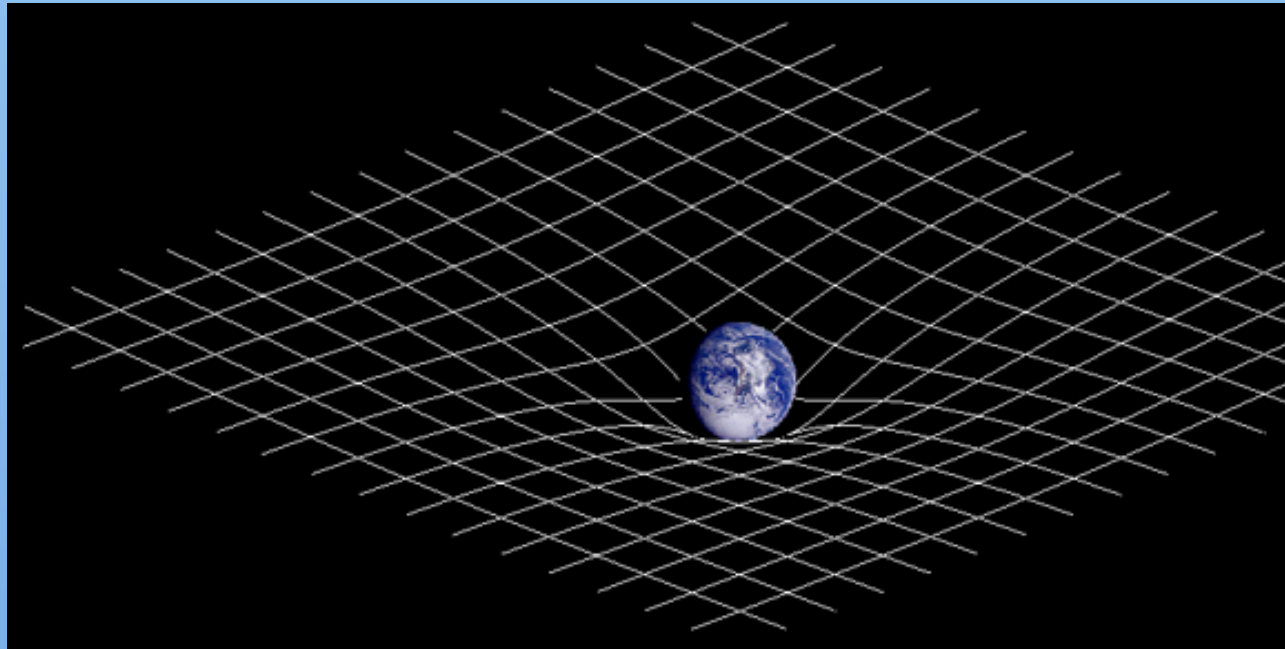
*Λ est « la constante cosmologique ». Son statut est l'objet des recherches de pointe en cosmologie actuelle...
Selon qu'on est Mathématicien ou Physicien, on place la constante cosmologique du côté géométrique ou physique de l'équation :*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}S \cdot g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

Pour les mathématiciens, il existe un théorème stipulant que le terme de gauche, géométrique, est le seul tenseur existant n'utilisant que la métrique et ses « dérivées secondes » et vérifiant une équation de conservation fondamentale, l'équation de Bianchi : $\nabla \cdot G = 0$. La constante cosmologique est alors « naturelle » et doit alors être vue comme une composante intrinsèque de la géométrie de l'espace-temps...

Visualiser l'espace-temps courbe.

Quelques remarques sur l'illustration souvent donnée de l'espace-temps courbe :

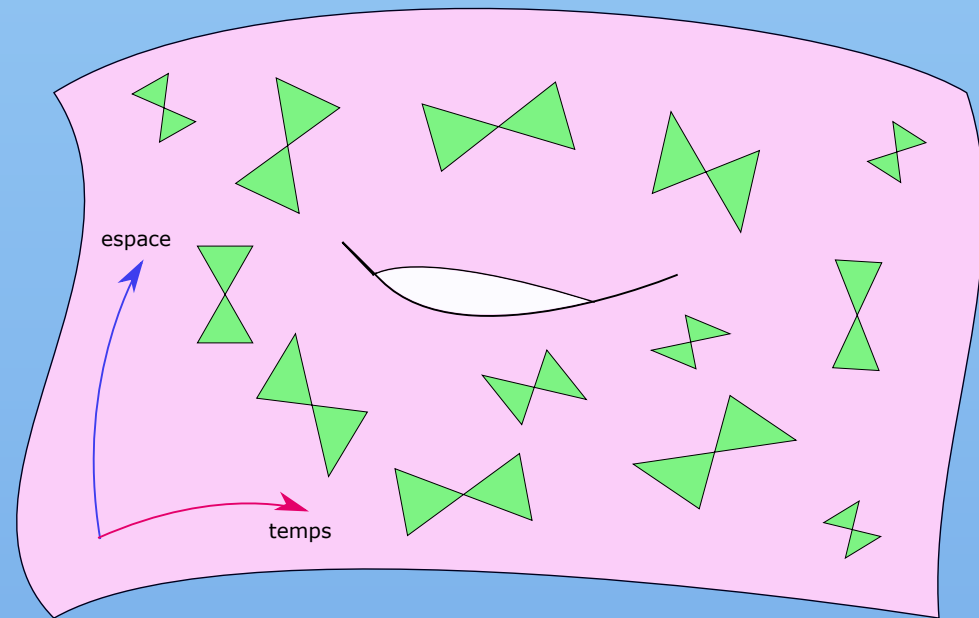


Ces figures, très répandues, cachent des points très importants :

- La « déformation » du temps n'apparaît pas : i.e l'influence de la courbure sur les mesures de temps propre.
- L'espace-temps ne se déforme pas dans un "espace" plus grand, il se déforme "en lui-même".
- Ce n'est pas le "poids" de la boule qui déforme l'espace-temps, c'est sa "présence".
- Il faut comprendre que la boule, la planète ou l'étoile qu'elle représente, fait partie de l'espace-temps.

Les schémas faisant apparaître les cônes de lumières sont les plus pertinents.

Définir un modèle d'espace-temps.

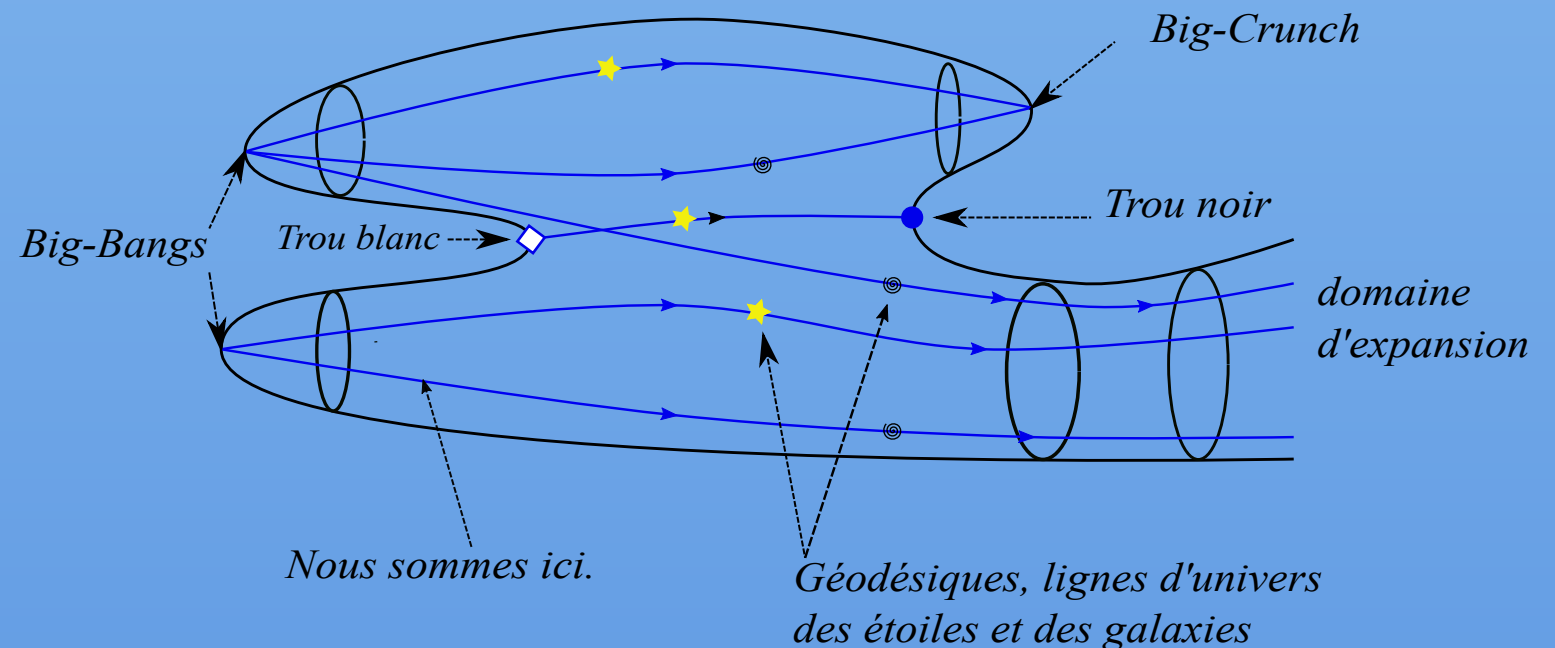


Pour définir un modèle d'espace-temps :

- 1/ : On choisit une variété.
- 2/ : Sur cette variété on définit une métrique.
- 3/ : On calcule les géodésiques de cette variété munie de cette métrique.
- 4/ : On prend un télescope
- 5/ : On compare les géodésiques calculées aux géodésiques observées.
- 6/ : Si ça correspond, on garde le modèle.
- 7/ : Si ça ne correspond pas, on le jette et on en cherche un autre !

Quoique... Certains modèles mathématiques *a priori* peu pertinents sur le plan physique peuvent s'avérer être de fascinantes sources de problèmes géométriques... et se révéler, quelques décennies plus tard, décrire d'authentiques objets astrophysiques. L'exemple le plus emblématique étant la découverte par les mathématiciens des trous noirs, 50 ans avant leur observation par les physiciens.

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$



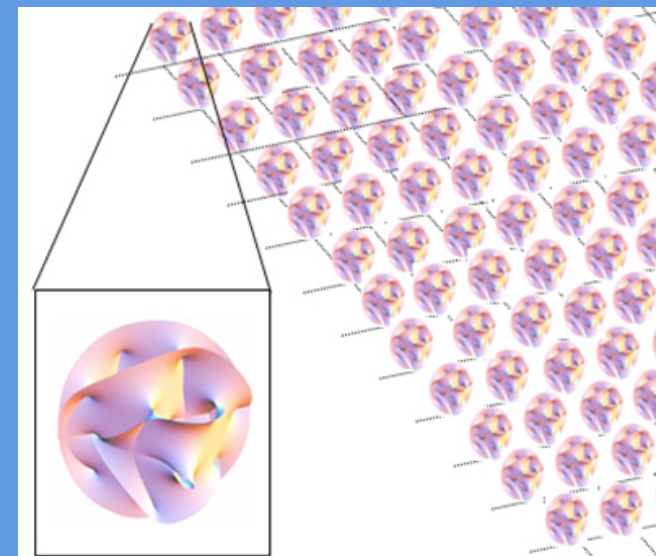
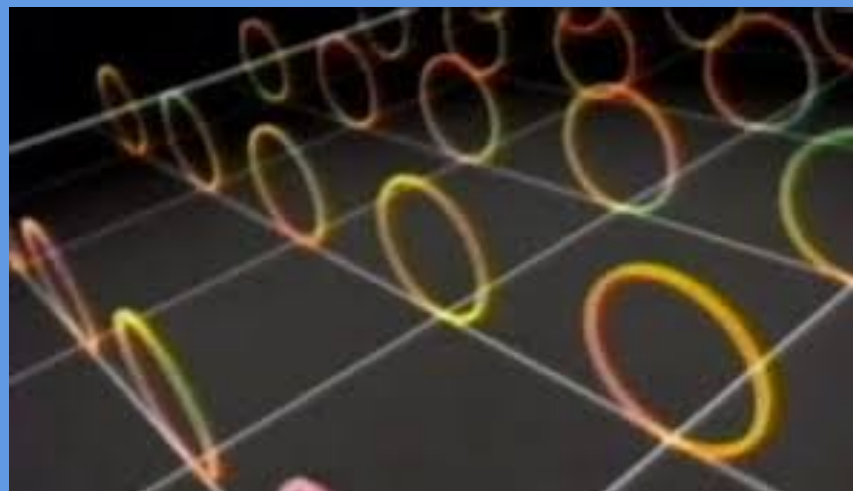
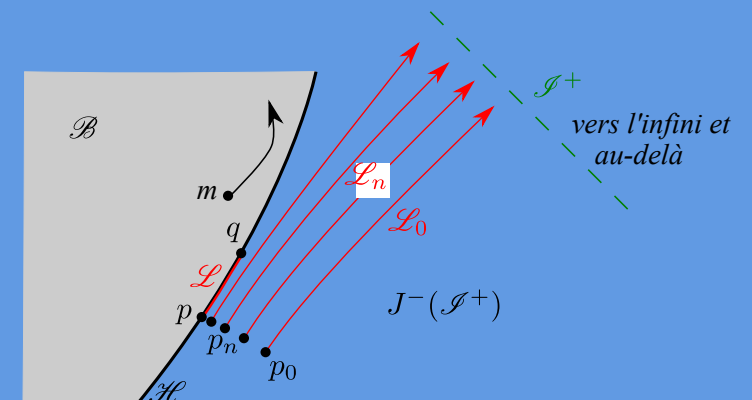
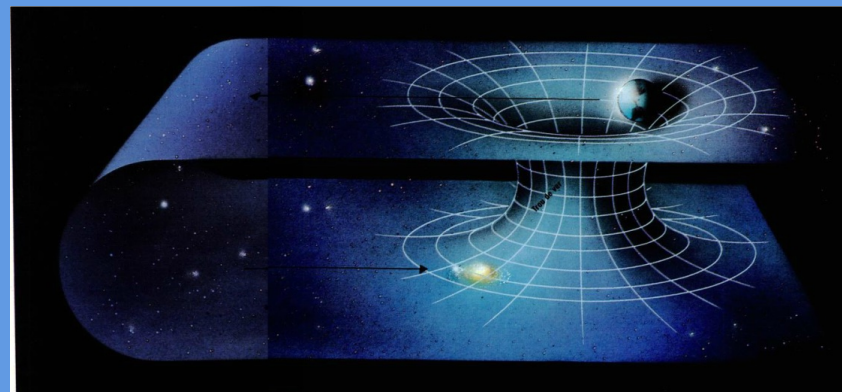
d'après Michel Vaugon...

Une Théorie Géométrique !!

En faisant des hypothèses purement géométriques, un mathématicien peut ne considérer que les postulats géométriques, et se passer de la partie physique (i.e de l'équation d'Einstein), pour créer des objets extraordinaires comme les trous noirs, les trous de ver, le Big-bang, les singularités, les boucles temporelles.

Par ailleurs, la géométrie de la relativité s'est aussi enrichie sous l'impulsion de mathématiciens-physiciens, par exemple en ajoutant d'autres dimensions : théorie de Kaluza-Klein, théorie des cordes.

La relativité générale est une théorie de mathématiciens !



Objet purement géométrique !

La star de la relativité générale : le trou noir.

Définition d'un Trou Noir :

- C'est un « tube d'univers », sur la surface duquel tous les cônes sont tangents (on appelle cela une surface de genre lumière), le demi-cône du futur étant à l'intérieur. On appelle ce tube un Horizon des Événements.

- **C'est une définition purement géométrique !**

- **Les trous noirs ont été inventés mathématiquement 50 ans avant d'être observés...**

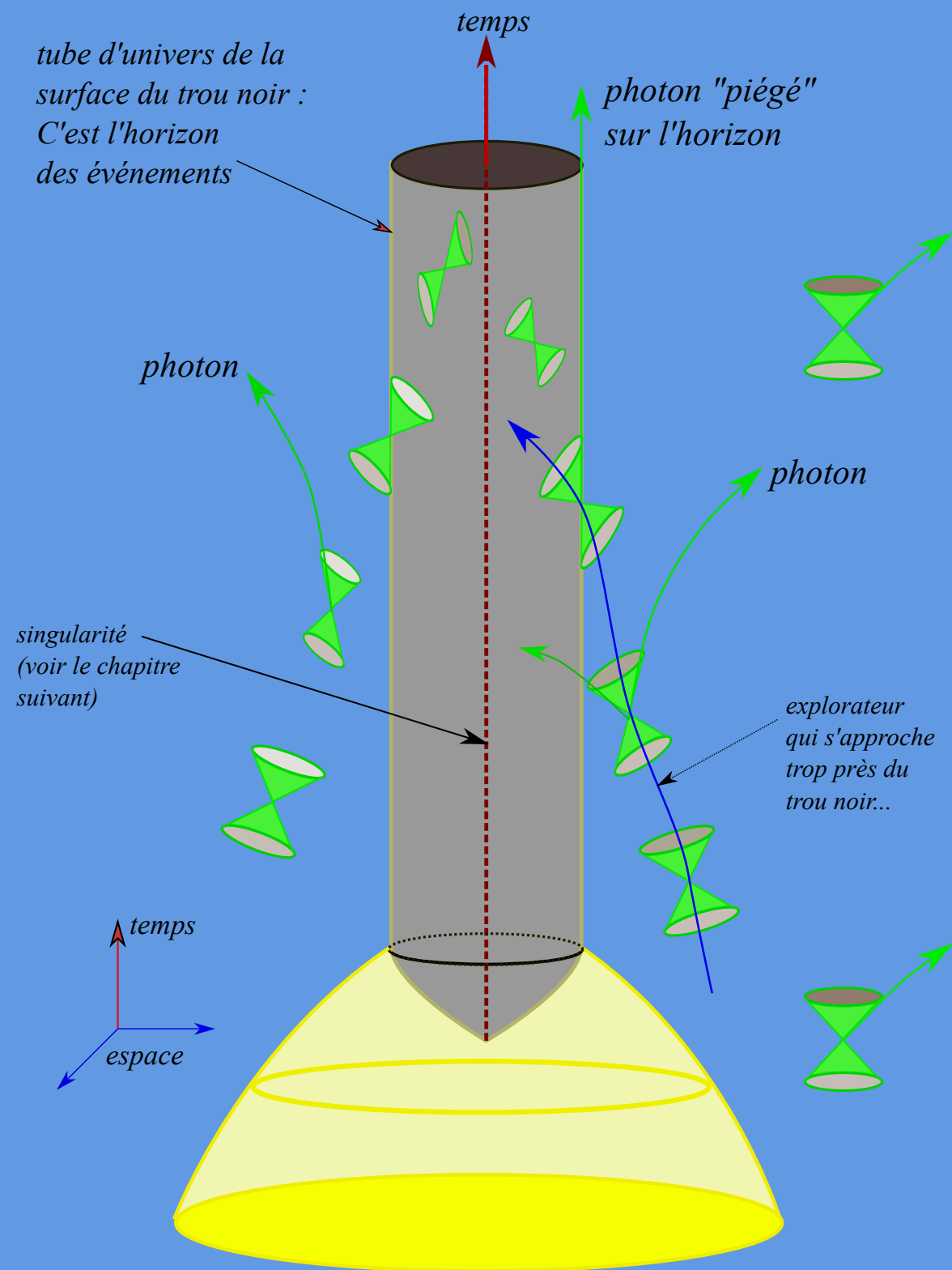
— L'horizon des événements est une surface purement géométrique, c'est une surface immatérielle.

— L'intérieur d'un trou noir, c'est du vide !

— Pourtant, un trou noir, c'est très lourd !

— Ce n'est pas un corps dense, mais un corps compact.

— La « singularité » centrale ne fait pas partie de la variété espace-temps.



Les cônes de lumière s'inclinent vers le tube représentant les lignes d'univers de la surface d'un trou noir, l'horizon. Une fois à l'intérieur, le cône de lumière du futur est entièrement tourné vers l'intérieur ; plus rien ne peut s'échapper. A la surface du trou noir, un photon émis vers l'extérieur reste piégé sur l'horizon. Loin du trou noir, rien n'est affecté : ceci est matérialisé par le cône vertical, non déformé. D'après la *structure causale définie par les cônes de lumière*, on voit que le "futur" de toute particule pénétrant l'horizon du trou noir est irrévocablement tourné vers la singularité...

- Un trou noir n'est pas un « aspirateur cosmique » : au loin, les corps continuent à vivre tranquillement, sur une orbite qui ne dépend que de la masse du trou noir.
- Ce n'est que « proche » du trou noir (là où il y avait avant de la matière stellaire par exemple) qu'il se passe des phénomènes remarquables.

Fin de vie d'une étoile
s'effondrant en trou noir.

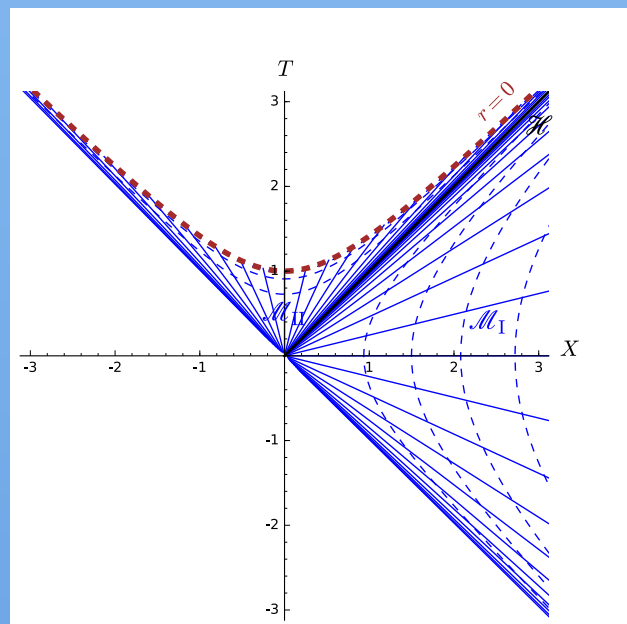
Retenons que le point fondamental est qu'aucune courbe de genre temps ou lumière qui pénètre à l'intérieur de *l'horizon des événements* ne peut en ressortir; c'est la définition même d'un trou noir.

Caractériser ces surfaces s'est avéré être un redoutable problème de géométrie Riemannienne. Il a donné lieu à une série de théorèmes regroupé finalement sous l'appellation « *théorème d'unicité* », fruit d'un travail s'étalant sur 20 ans regroupant Hawking, Carter, Israel,..., Cruschiel, Galloway :

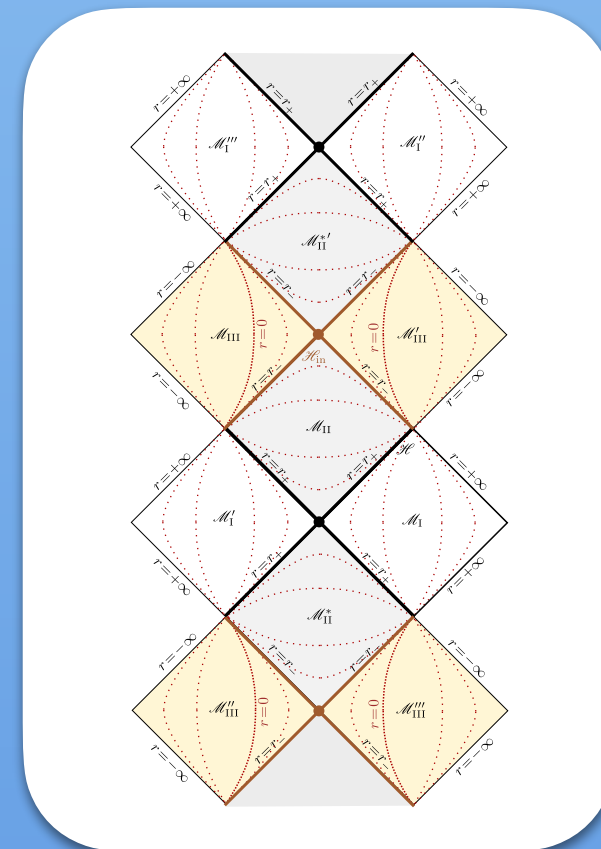
Théorème : Un trou noir « statique » est décrit par la métrique de Schwarzschild ou de Kerr.

D'après ces théorèmes, un trou noir est donc parfait au sens de la géométrie, il n'a ni bosse ni creux. De même qu'une sphère est entièrement caractérisée par son rayon, ***un trou noir est entièrement caractérisée par sa masse et sa vitesse de rotation. C'est un objet purement géométrique...***

Une "carte" du trou noir de Schwarzschild :



Des "cartes" du trou noir de Kerr et de son extension mathématique infini :



Schwarzschild's Solution to Einstein's Equations

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

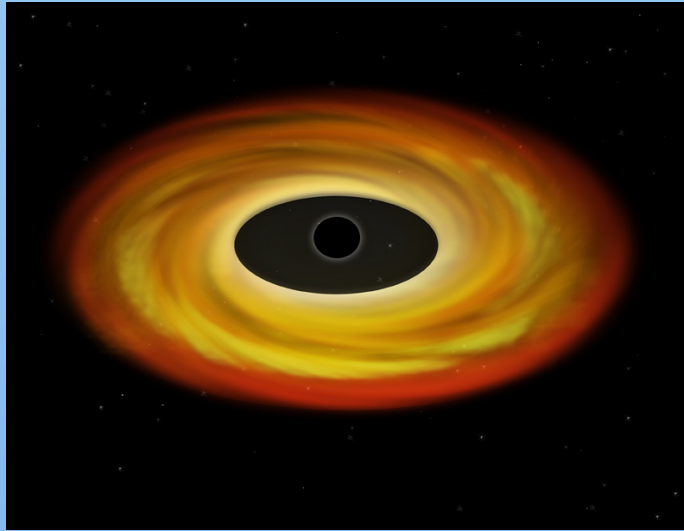
Time Dilation (pointing to $c^2 dt^2$)
Radial Length Contraction (pointing to dr^2)
Invariant Line Element (pointing to ds^2)

Schwarzschild Radius

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

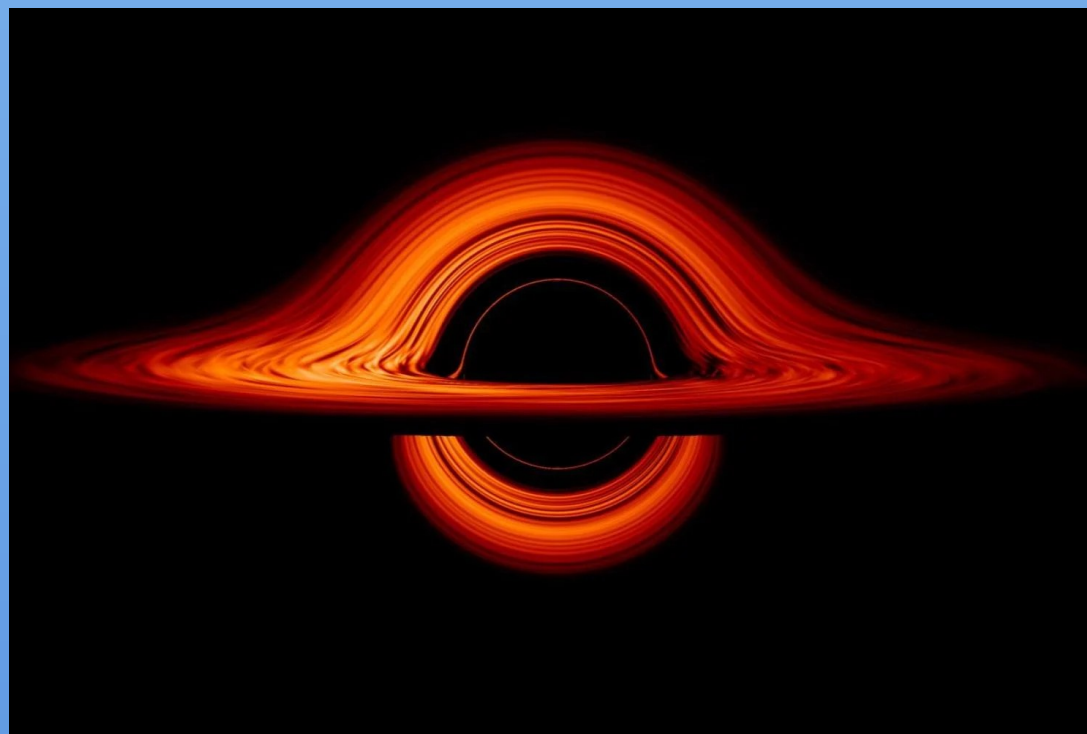
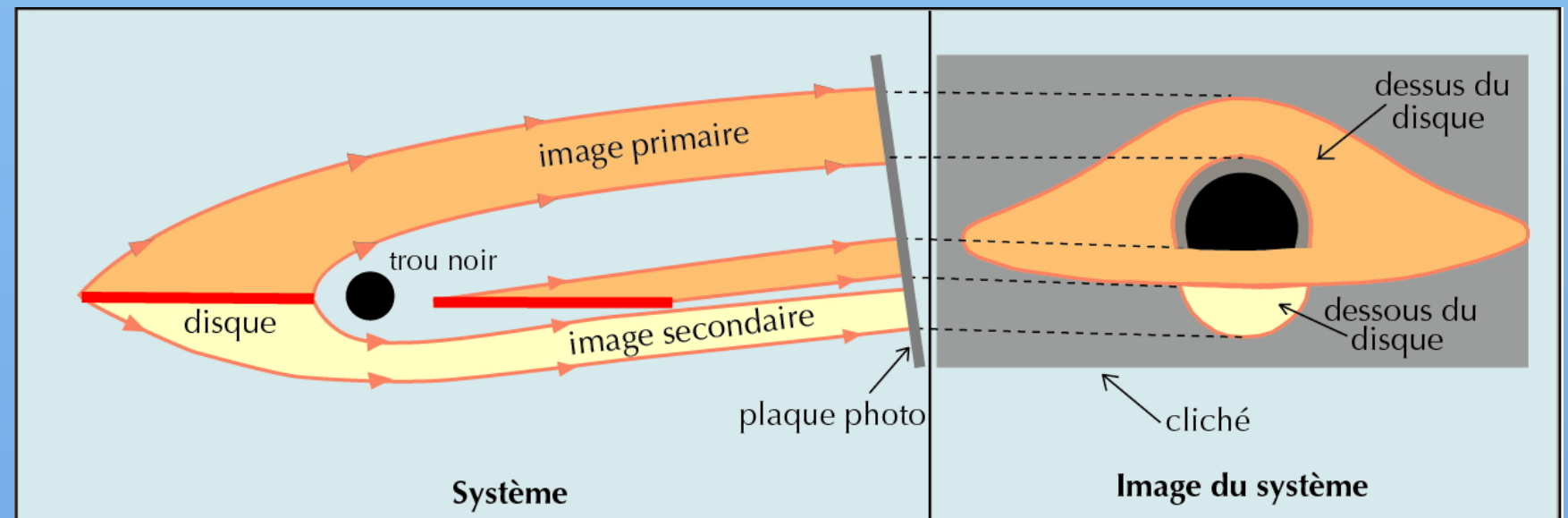
Ce sont des schémas, dit de **Carter-Penrose**, qu'on utilise pour étudier la structure causale de l'espace-temps, en y représentant les géodésiques (celles des photons en vert, à droite), ou diverses surfaces d'intérêt, comme l'horizon des événements (en noir gras, noté H). Ces cartes sont obtenues en utilisant un choix particulier de coordonnées, découvertes par Carter, Boyer, Lindquist, entre autres.

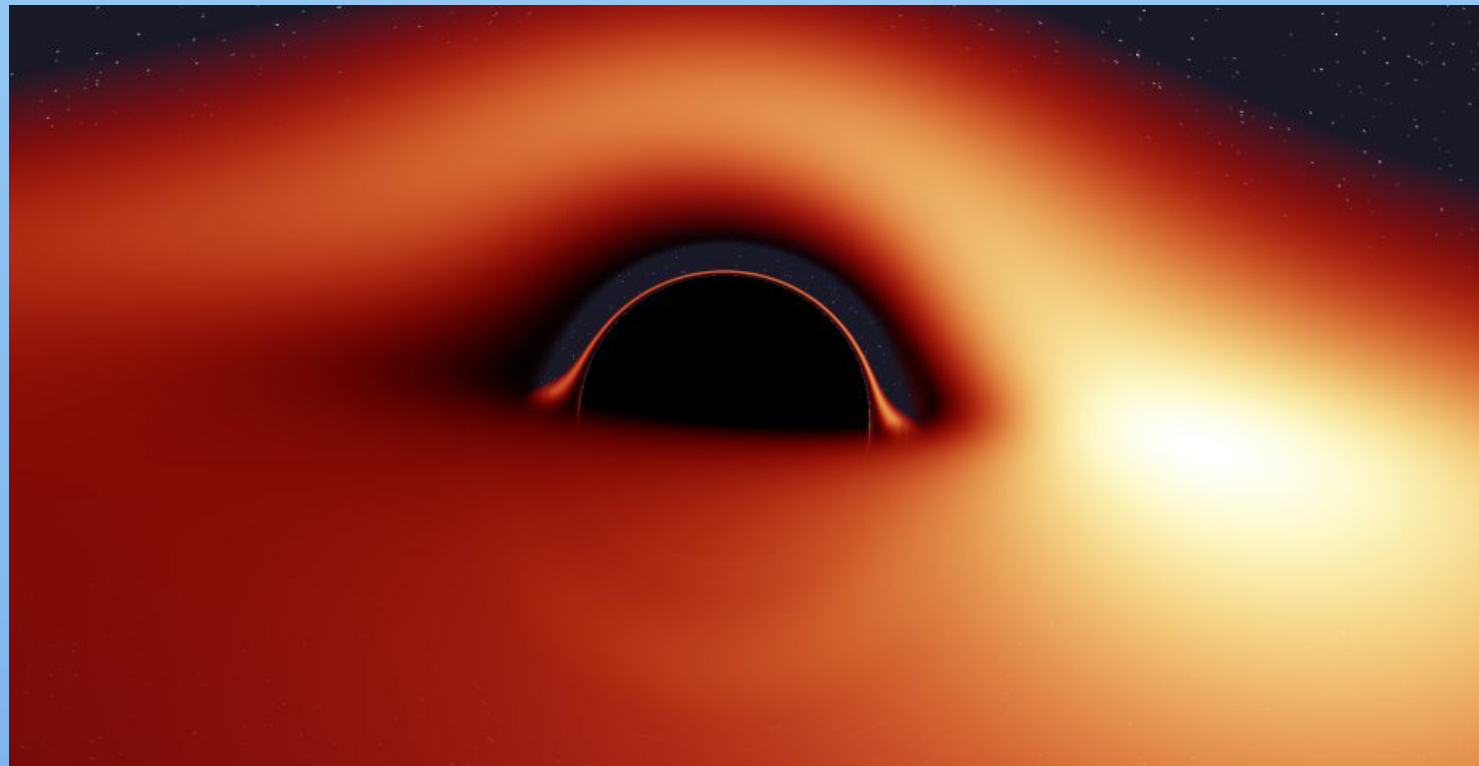
« Image » du disque d'accrétion d'un Trou Noir.



Un trou noir est généralement entouré d'un disque d'accrétion. Il s'agit de matière qui se met en orbite, en s'échauffant très fortement, autour du trou noir. Géométriquement, ce disque est parfaitement plat exactement comme les anneaux de Saturne. Mais à cause de la gravitation extrême à proximité du trou noir, l'image que nous en obtenons est fortement déformée, car les rayons lumineux qui passent à proximité de l'horizon du trou noir sont fortement courbés, certains faisant même plusieurs tours avant de partir vers l'observateur.

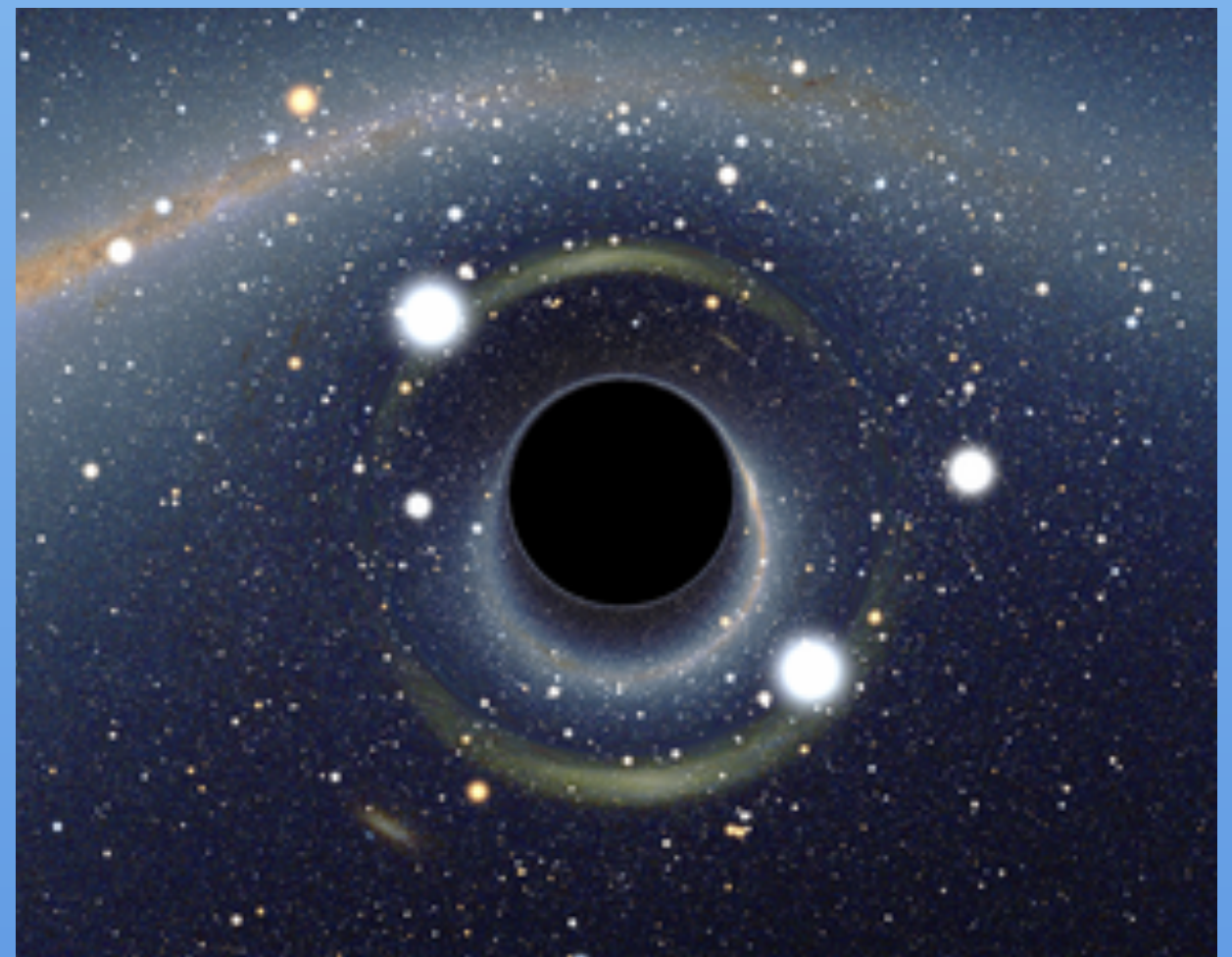
Schéma dû à J.P. Luminet, un des premiers théoriciens à avoir calculer l'image d'un disque autour d'un trou noir (citons également les travaux analogues de J-A Marck). Ce sont ces travaux théoriques qui fournissent le type d'image maintenant célèbre que l'on propose des trous noirs :





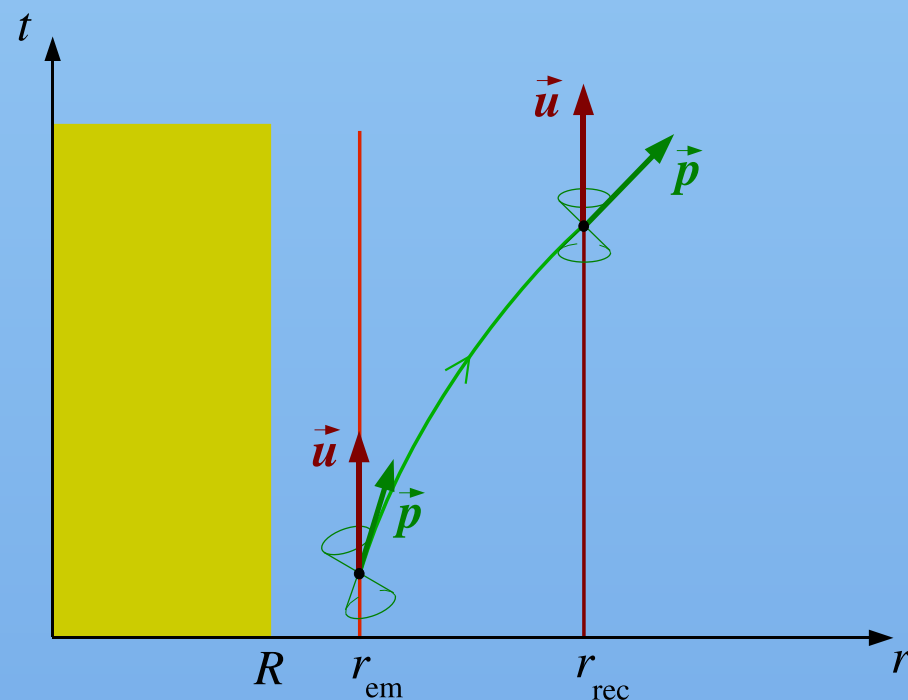
L'image spectaculaire du disque d'accrétion d'un trou noir calculée précisément par J-A. Marck en 1996 avec les équations de la relativité générale.

On observe une très forte déformation des images autour d'un trou noir, car il courbe très fortement la trajectoire des rayons lumineux. (Image calculée par Alain Riazuelo).



Effet purement géométrique !

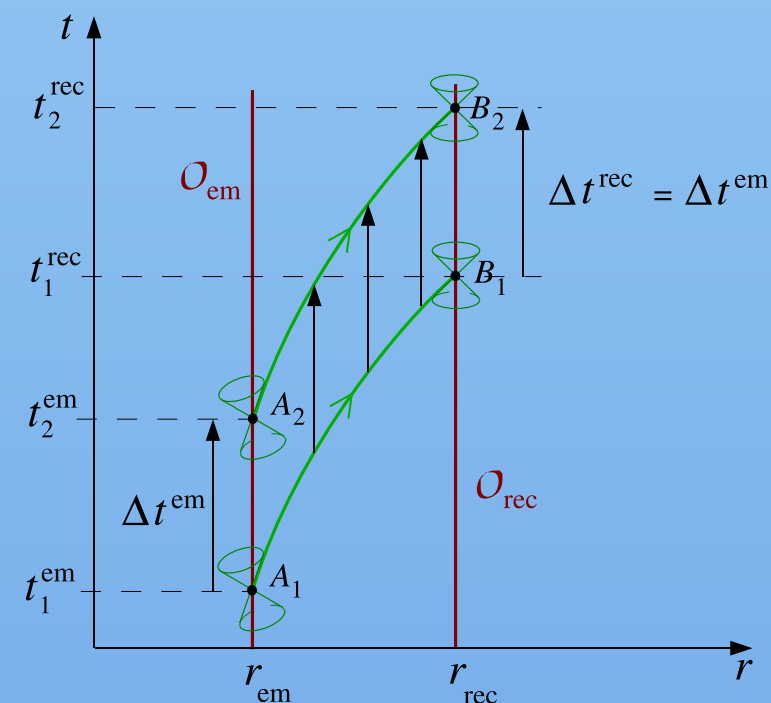
L'effet Einstein : Décalage spectral et « dilatation » des durées dans un champ gravitationnel.



Théorème géométrique : « Le produit scalaire d'un champ de Killing et du vecteur vitesse d'une géodésique est constant le long de cette géodésique » .

Une masse, comme une planète, une étoile, ou un trou noir, modifie "l'écoulement" du temps autour d'elle car elle modifie la courbure de l'espace-temps, et donc l'allure des géodésiques de genre temps.

Considérons ainsi deux observateurs munis de chronomètres identiques, l'un proche de la surface d'un trou noir (ou de toute autre masse) et l'autre très éloigné. Supposons que les deux observateurs sont immobiles l'un par rapport à l'autre. Si l'observateur près du trou noir émet des flashes lumineux toutes les secondes, mesurées sur son chronomètre, l'observateur lointain les verra lui parvenir séparés par un intervalle de temps, mesuré sur son propre chronomètre, beaucoup plus grand : plusieurs minutes, heures, jours, pourront séparer pour l'observateur lointain l'arrivée des flashes, l'intervalle étant d'autant plus grand que le champ gravitationnel, donc la courbure, est intense à l'endroit de l'émission des flashes. L'intervalle de temps deviendrait "infini" si les flashes étaient émis depuis la surface d'un trou noir. Pour l'observateur lointain, le temps de l'émetteur semble ralenti ; il s'agit d'un effet de dilatation des durées dû à la gravité. On l'appelle l'effet Einstein.



Conséquences : décalage spectral et « dilatation » des durées dans un champ gravitationnel.

A gauche, tube d'univers de l'étoile en jaune, et lignes d'univers de deux observateurs à des distances r_{em} (rayon émission) et r_{rec} (rayon réception). Le cône de lumière le plus près de l'étoile est incliné vers l'étoile du fait de la courbure qu'elle engendre. Le rayon lumineux (la géodésique lumière) émis est déformé par cette courbure.

A droite, le résultat de la mesure du temps propre écoulé pour chaque observateur entre émissions et réceptions de signaux consécutifs : pour des raisons de symétries, les coordonnées utilisées dans ces schémas d'espace-temps sont telles que $\Delta t^{rec} = \Delta t^{em}$. Mais si l'on calcule avec la métrique le temps propre $\Delta \tau_{em}$ écoulé entre A_1 et A_2 d'une part, et le temps propre $\Delta \tau_{rec}$ entre B_1 et B_2 d'autre part, on trouve que :

$$\Delta \tau_{rec} > \Delta \tau_{em}.$$

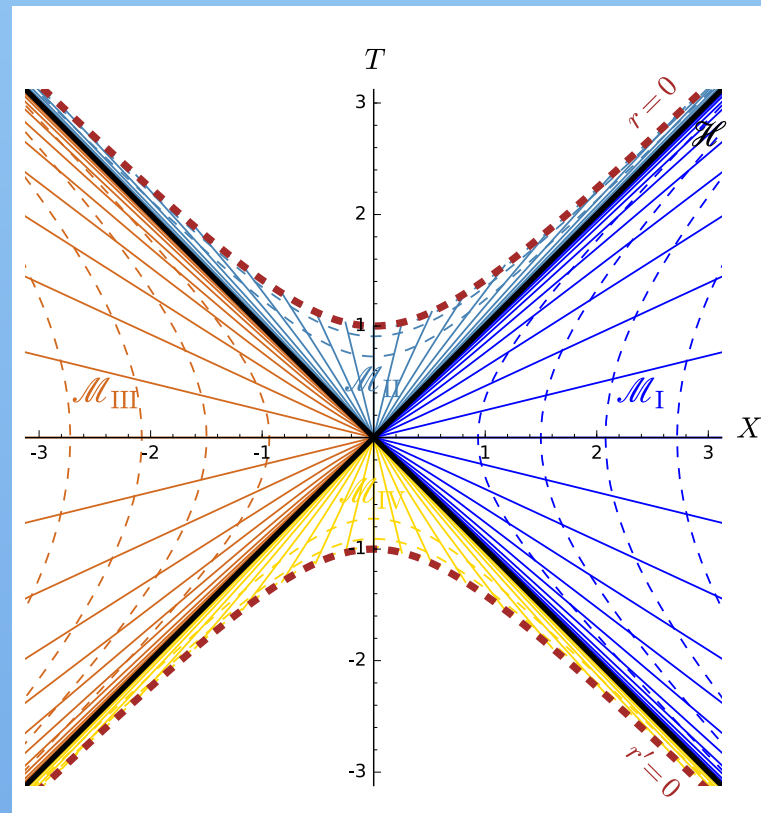
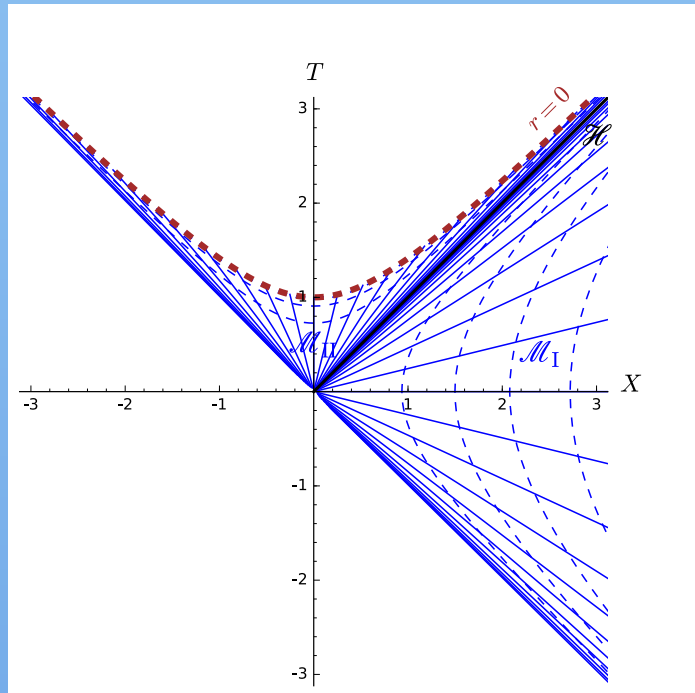
Il s'agit là d'un phénomène de dilatation (ou contraction) des temps au sens suivant : si $\Delta \tau_{em}$ est le temps entre deux tics successifs de l'horloge de O_{em} et qu'il informe l'observateur O_{rec} en émettant un signal radio à chaque tic, l'observateur O_{rec} perçoit un intervalle de temps propre $\Delta \tau_{rec}$ entre chaque réception de ces signaux strictement supérieur à $\Delta \tau_{em}$.

« On vieillit plus vite au sommet d'une montagne qu'au fond d'une vallée... »

Objet purement géométrique !

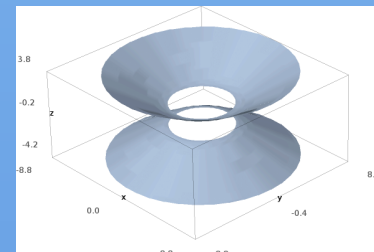
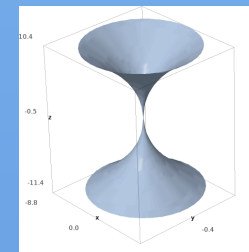
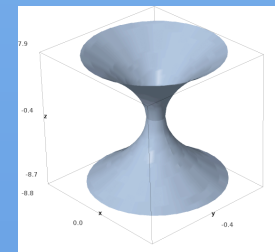
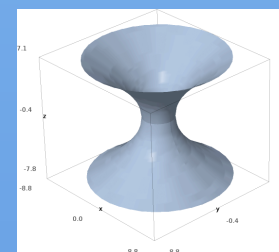
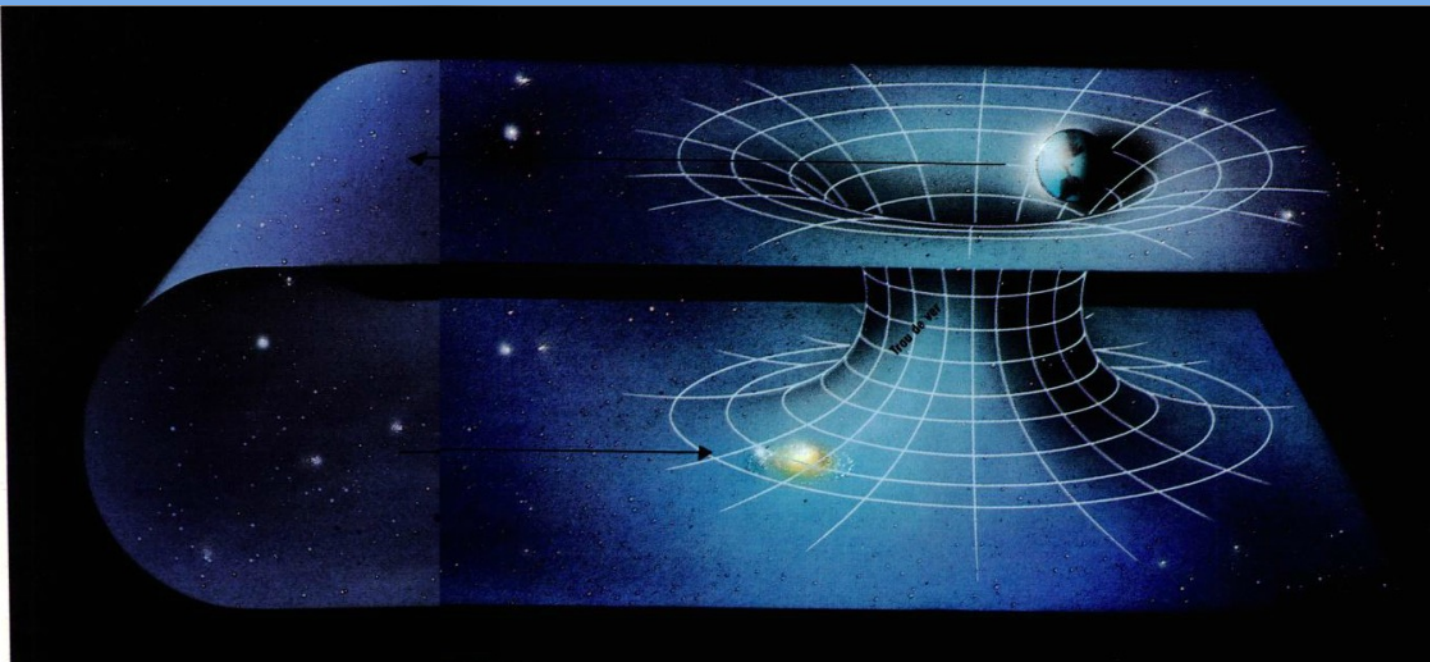
Les trous de ver.

Un objet purement mathématique, construit par symétrie à partir de la solution de Schwarzschild.



Les trous de ver offrent une fascinante illustration du pouvoir spéculatif qu'offrent les mathématiques à la physique.

Bien que permis par la théorie, pas de processus de formation physique connu, aucune évidence observationnelle. De plus, une existence très brève...



La géométrie au secours de la physique !

Le Big-Bang et l'évolution de l'Univers

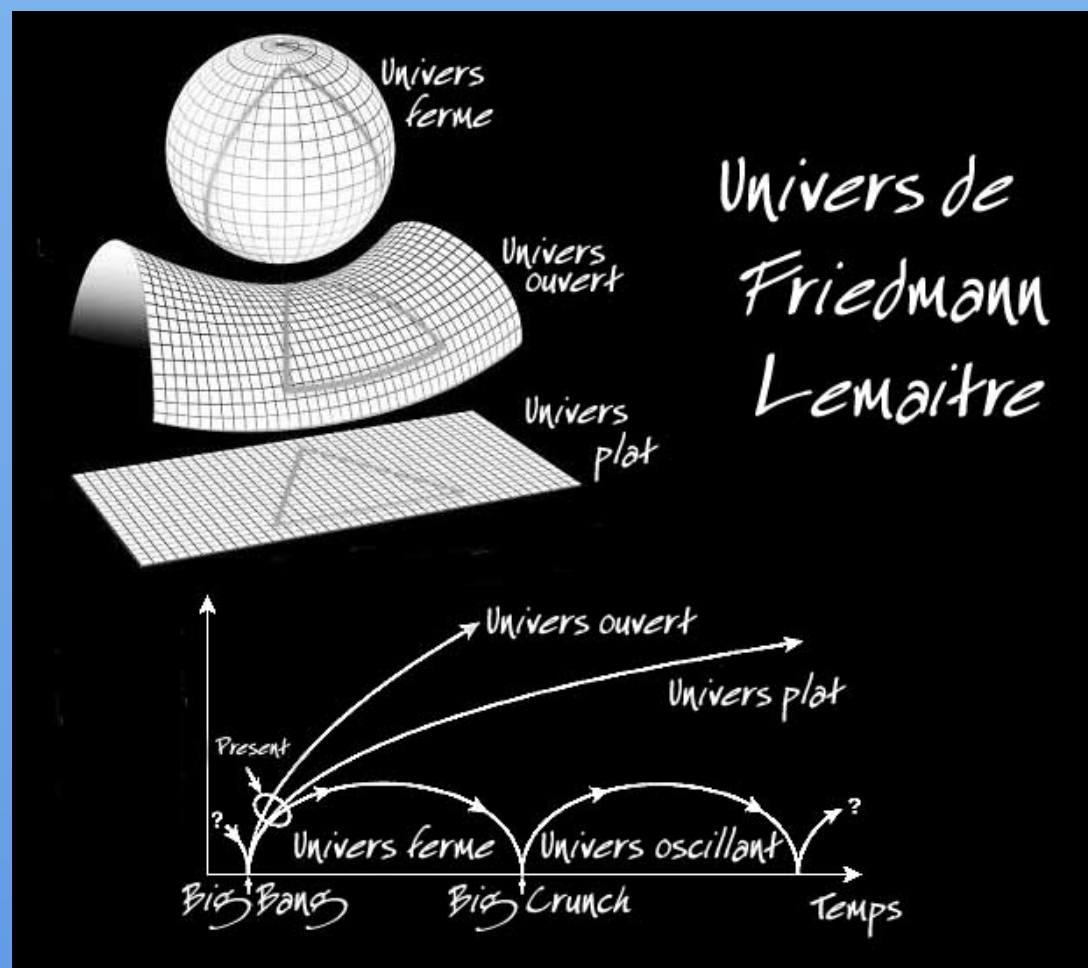
L'équation d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}S \cdot g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ est TRÈS compliquée : il s'agit en fait de 16 équations aux dérivées partielles liées, de 4 variables... Or, on voudrait l'appliquer à l'univers tout entier !!

Pour s'en sortir, on fait des hypothèses **géométriques** :
 Un « feuilletage spatial » : découpage mathématique temps/espace,
 Un Principe cosmologique de nature géométrique : l'Univers est spatialement homogène et spatialement isotrope : mathématiquement, on dit maximalement symétrique.

Les mathématiques simplifient le réel...

On obtient plusieurs modèles possibles d'évolution pour l'univers...

Les équations d'Einstein se ramènent alors à deux équations d'UNE variable, qu'on sait résoudre : les équations de Friedman-Lemaître.



$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{\kappa c^2}{a^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$



Edwin Hubble



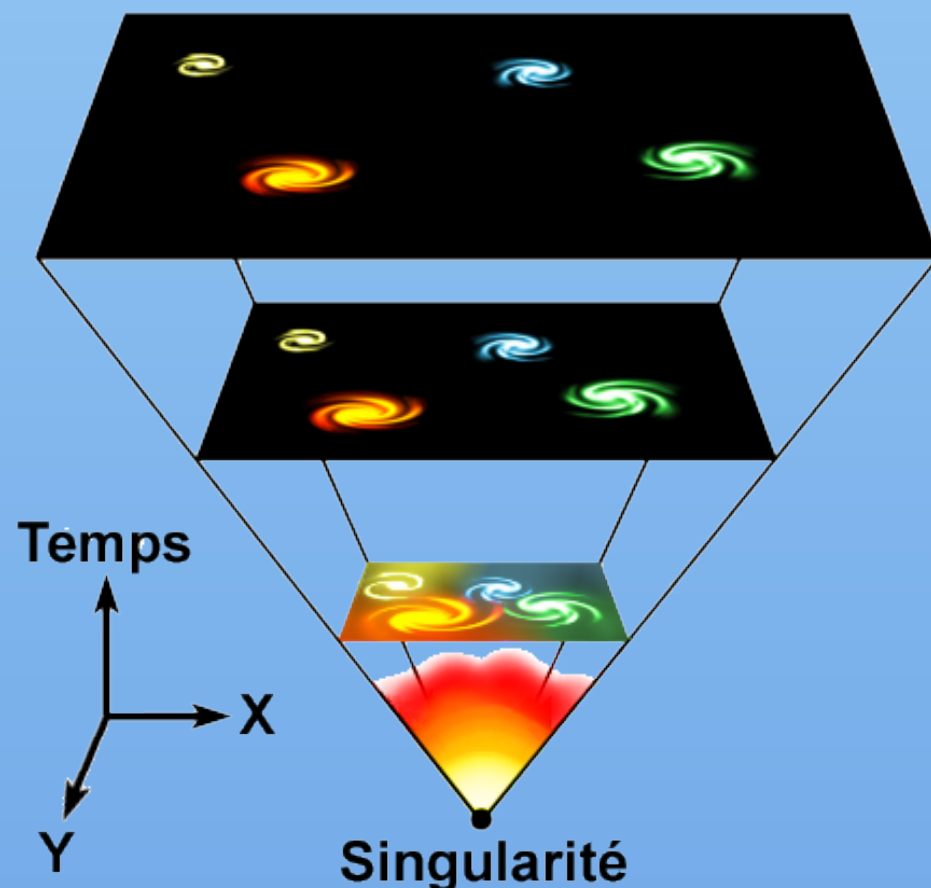
Georges Lemaître



Alexander Friedmann

La géométrie au secours de la physique !

Le Big-Bang : illustration et remarque

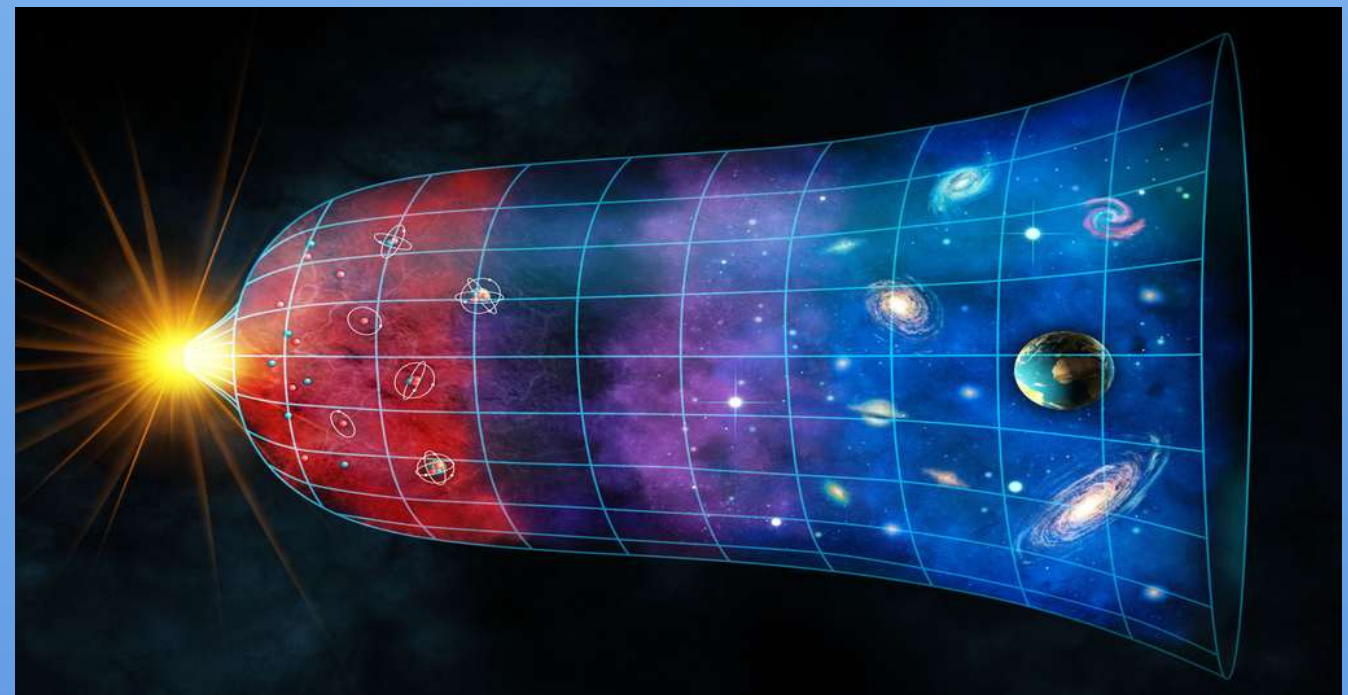


La variété espace-temps, avec l'expansion de ses tranches spatiales, due à l'évolution de la métrique le long d'un axe temporel, axe qu'il faut bien choisir pour obtenir un modèle cohérent. Vue autrement, l'expansion, c'est la dispersion des lignes d'univers géodésiques des galaxies, dispersion due à la courbure de l'espace-temps.

Grâce à la définition mathématique d'une variété, il n'y a pas besoin de faire référence à un espace « extérieur » pour parler de l'expansion de l'univers. Mais les mathématiques permettent aussi de « plonger » la variété espace-temps de l'univers dans un espace Euclidien ; néanmoins, puisqu'on n'y a pas accès, cet espace « englobant » n'a certainement aucune signification physique...

Remarque fondamentale :

Les temps et les distances cosmologiques sont des temps et des distances **construits** à partir de modèles mathématiques. Ces temps et distances dépendent donc du modèle retenu.



Problème purement géométrique !

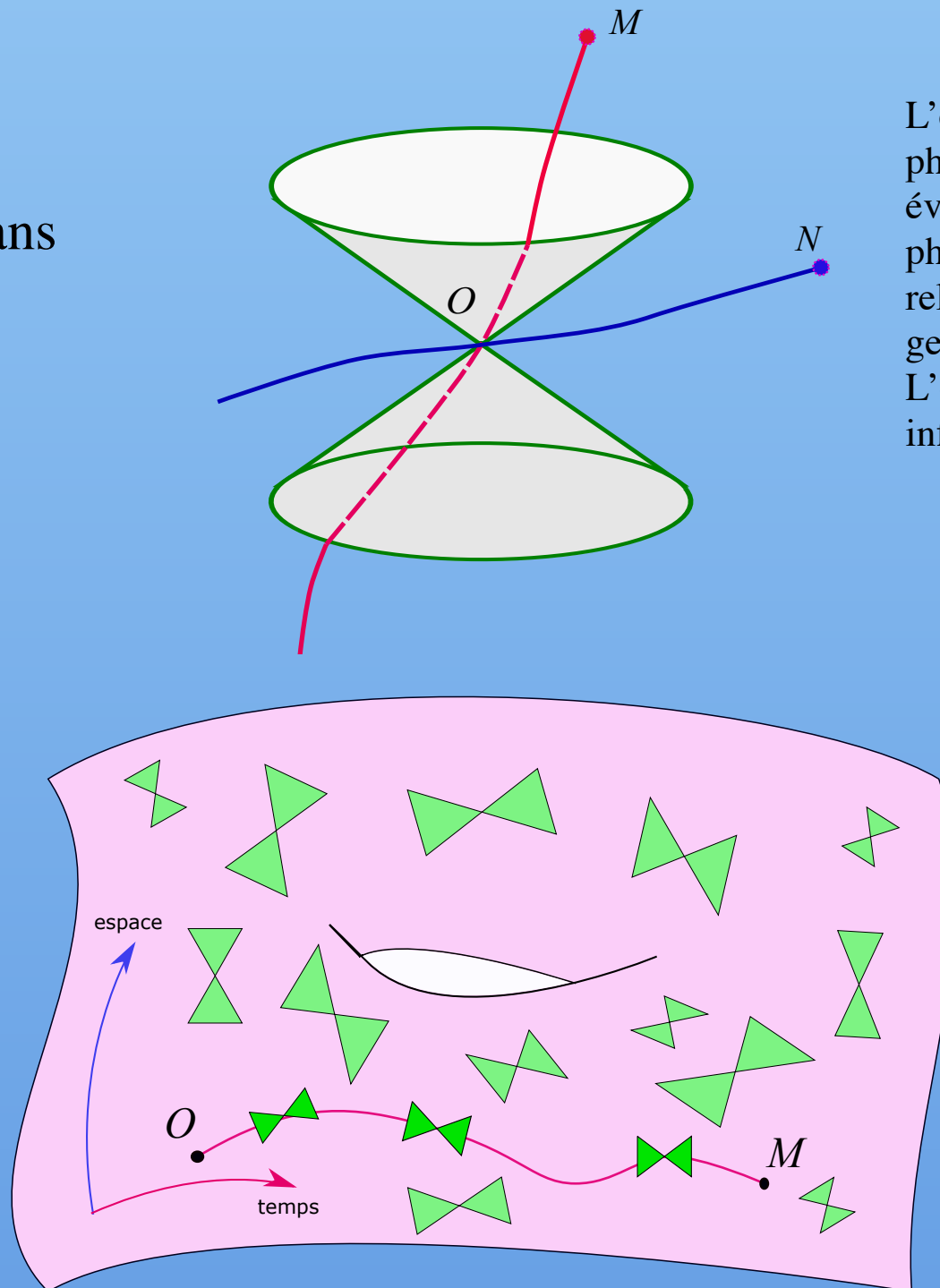
Lumière et Causalité.

Liens de causalité dans l'espace-temps :

Structure Causale :

Quels sont les couples d'événements de l'espace-temps que l'on peut relier par une courbe de genre temps ou lumière ?

- Sur une variété quelconque, les cônes de lumière ne sont plus tous alignés comme dans l'espace de Minkowski.
- C'est leur répartition qui détermine la structure causale de l'espace-temps représenté par la variété.

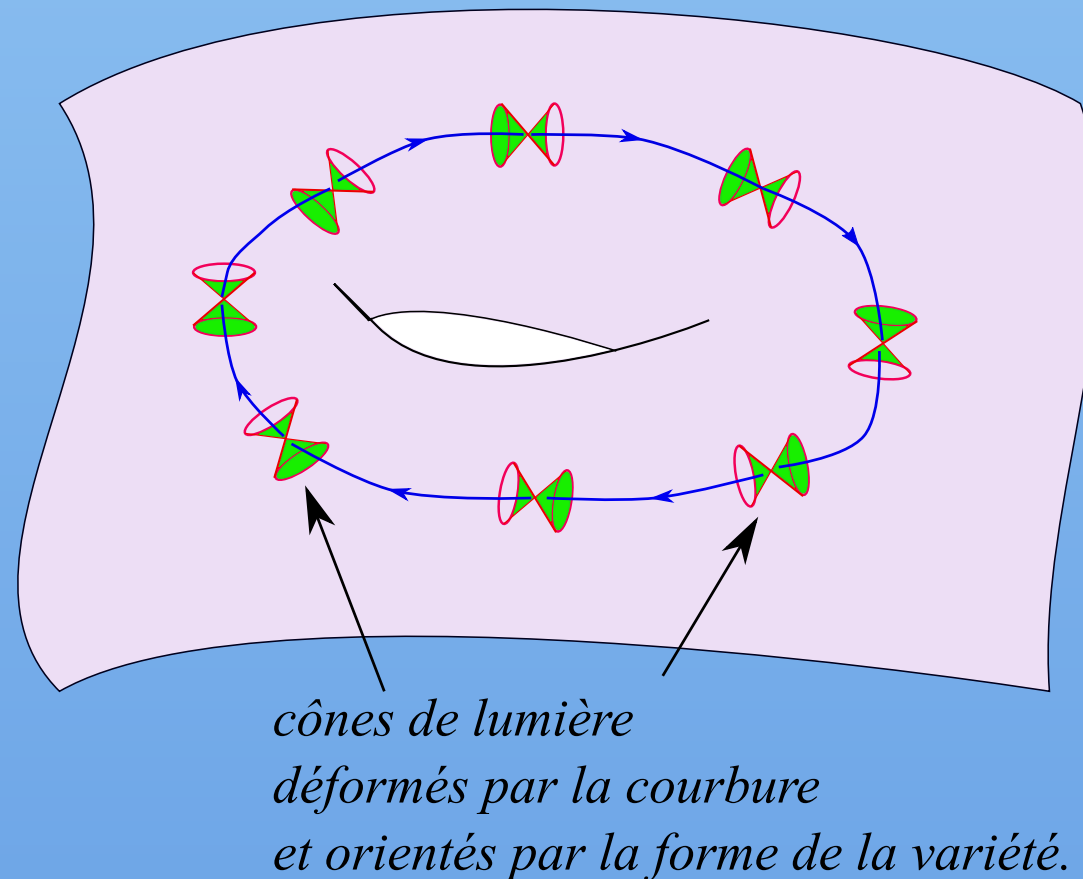


L'événement O peut envoyer des objets physiques vers M, et donc influencer cet événement. En revanche aucun signal physique, matériel ou lumineux, ne peut relier O et N car aucune ligne d'univers de genre temps ou lumière ne les joints. L'événement O ne peut avoir aucune influence physique sur l'événement N.

- La structure causale de la variété, c'est de la **Topologie**.
- **Topologie** : ensemble des propriétés invariantes par déformations continues : finie ou infinie, avec ou sans bord, avec ou sans trous,...
- La topologie peut être influencée par la courbure.
- La répartition des cônes de lumière sur la variété est essentiellement déterminée par sa topologie.
- Étudier la structure causale est donc un problème topologique...

Les cônes de lumière de la variété déterminent les futurs possibles des objets physique dans l'espace-temps.

Donc, on peut imaginer des boucles temporelles...



C'est la **topologie** de la variété, c'est à dire sa forme, indépendamment des distances, qui compte (c'est l'ensemble de ses propriétés invariantes par déformations continues : finie ou infinie, avec ou sans bord, avec ou sans trous,...). La topologie peut être influencée par la courbure.

Définir des propriétés qui empêchent un espace-temps de posséder des boucle temporelles est un problème de *topologie*.

Problème purement géométrique !

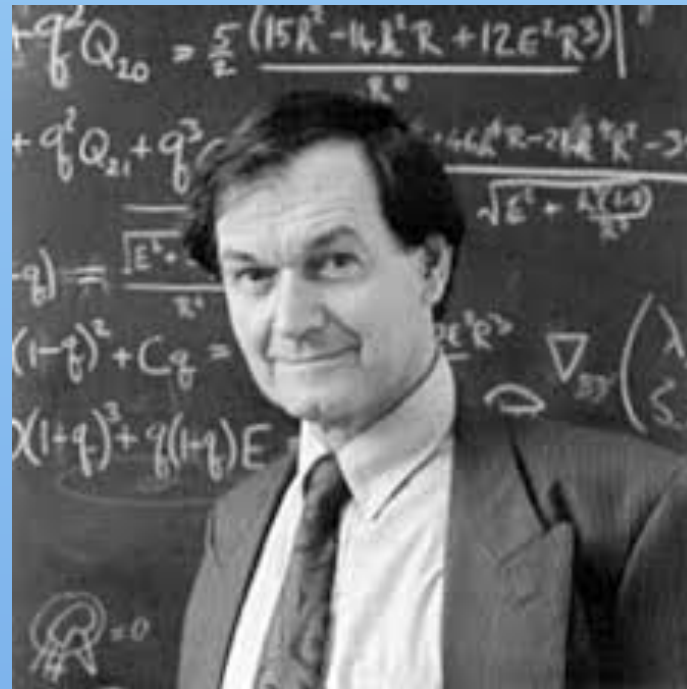
Les singularités de l'espace-temps.

Trous noirs et Big-Bang mènent à la notion de **singularités de l'espace-temps**. En effet, tous les modèles de trous noirs et de big-bang font apparaître des « zones » où la courbure de l'espace-temps « tend vers l'infini ». Mais ces modèles reposent sur l'existence de symétries...

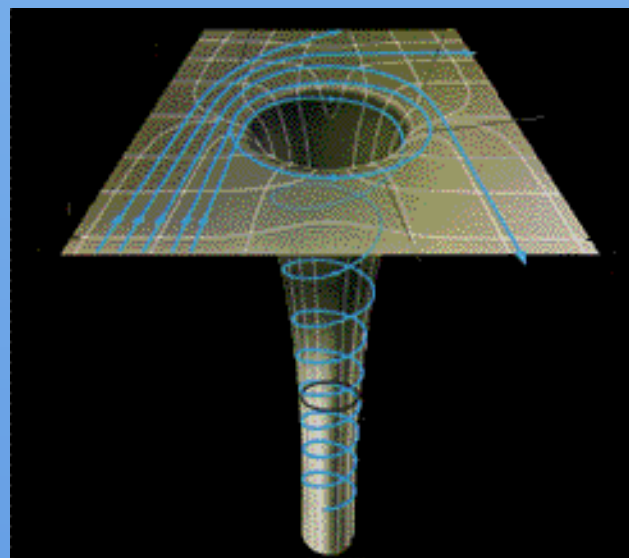
Partant de considérations beaucoup plus générales sur la nature de la gravitation et de l'espace-temps, ne supposant même qu'une partie des fondements de la relativité générale, essentiellement ses aspects géométriques globaux, Roger Penrose montra qu'une meilleure approche des singularités consistait à les considérer comme des *points de fuite* des géodésiques hors de l'espace-temps.

Penrose réussit à démontrer, de manière purement géométrique, que si la variété espace-temps présentait des zones de très forte courbure, ce qui physiquement pourrait être causé par une quantité suffisante de matière confinée dans un domaine suffisamment petit de l'espace, alors, nécessairement, certaines géodésiques de genre lumière (représentant des photons), ou de genre temps (représentant des objets matériels), ne peuvent se prolonger indéfiniment dans l'espace-temps : qu'une fois entrés dans la région de forte courbure, les objets ou photons, quelle que soit leur nature, ne peuvent plus avoir une existence infinie au sein de l'espace-temps représentant notre univers.

Lecture recommandée : Magazine Tangente n°198



**Roger Penrose:
Premier (et seul)
prix Nobel de Mathématiques !**



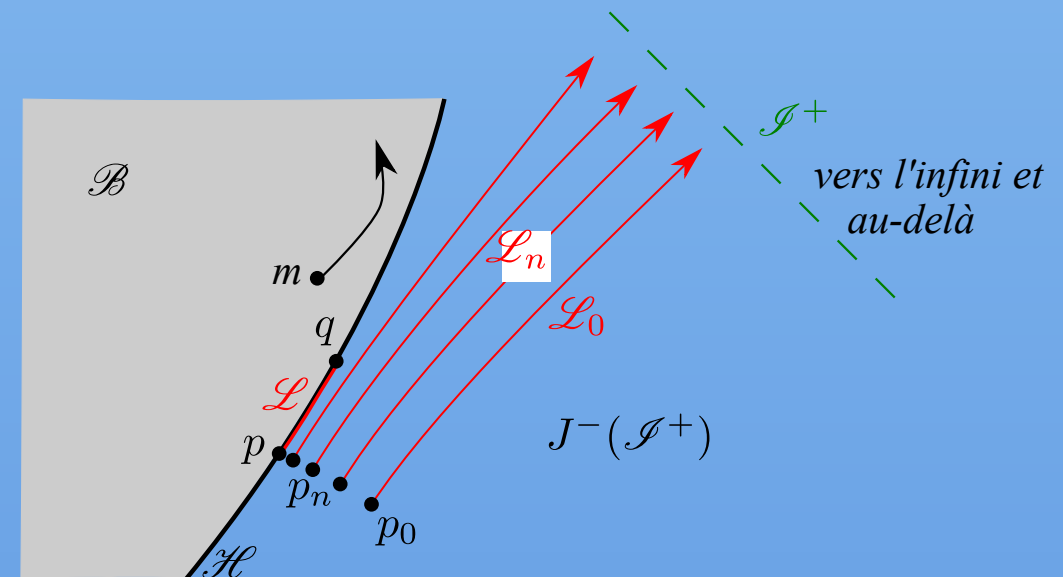
Théorème de Penrose (1964) : Si un espace-temps vérifie de « bonnes » conditions de causalité (topologie), et si il y existe une zone de courbure suffisamment forte, il existe nécessairement des géodésiques de genre temps qui ne peuvent être prolongées indéfiniment. (aucune hypothèse de symétrie).

Démonstration : par contradiction ! inhabituelle pour les physiciens !

Conjecture de censure cosmique : Une singularité est toujours masquée par un horizon des événements (par la surface d'un trou noir).

Problème géométrique toujours ouvert !

C'est néanmoins cette conjecture qui affirmerait mathématiquement l'existence des trous noirs...



Penrose aborda le problème de l'existence des trous noirs non pas comme un problème physique, mais comme un problème géométrique.

Ses méthodes révolutionnèrent l'étude de la relativité générale, en en faisant une véritable branche de la géométrie Riemannienne.

Un tremplin vers de nouvelles géométries !

L'espace-temps de Kaluza-Klein

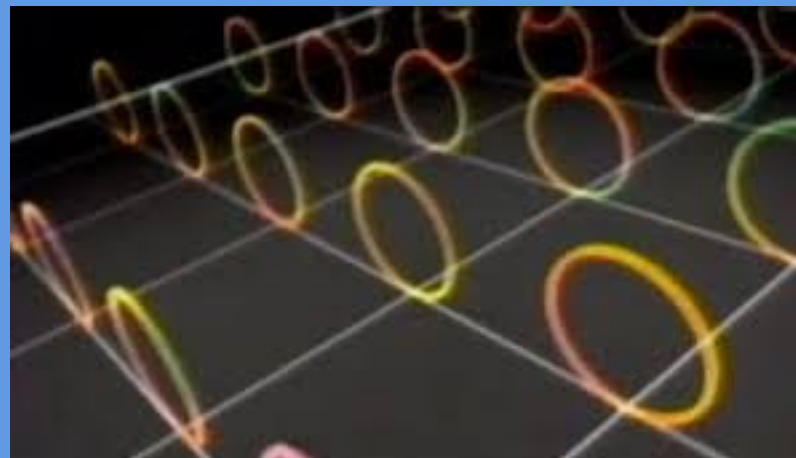
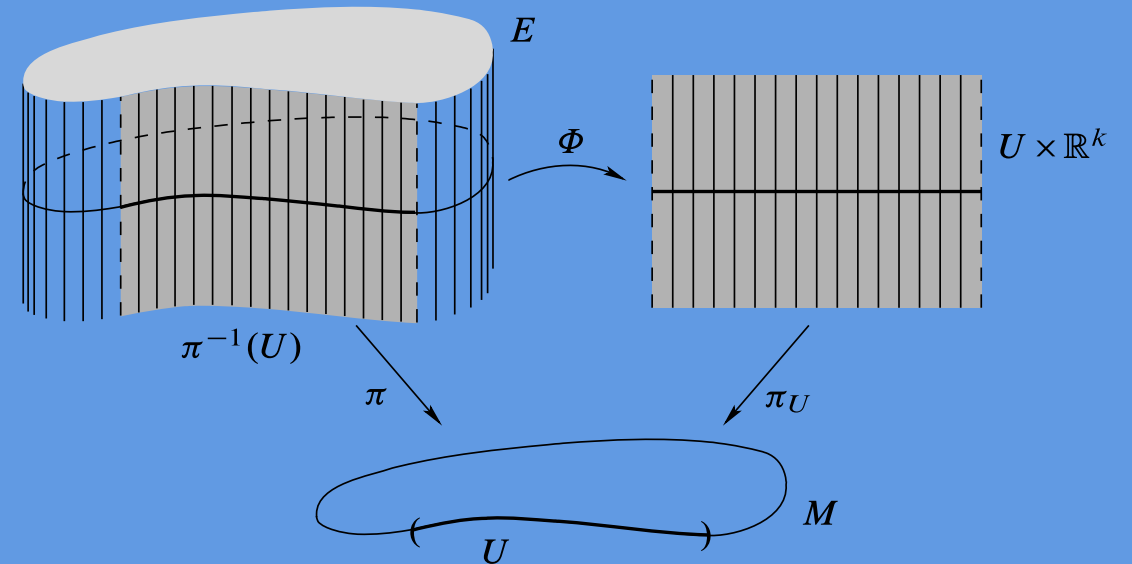
Motivation : regrouper dans une même théorie géométrique la gravitation et l'électromagnétisme.

Comment faire ? Il faut « enrichir » la géométrie.

Idée géniale : Rajouter une dimension !

Mais une dimension « petite et fermée » (compacte)... (1920)

Utilisation/invention de la notion de « **variété fibrée** » . C'est la structure fondamentale de la géométrie différentielle moderne : on étudie l'interaction des géométries de la fibre, de la base, et de la variété globale...



Espace-temps de Kaluza-Klein : en chaque point de l'espace-temps d'Einstein, on attache un petit cercle.

Les lignes d'univers de cet espace-temps de dimension 5 ont maintenant un degré supplémentaire de liberté : elles peuvent s'enrouler autour de la cinquième dimension.

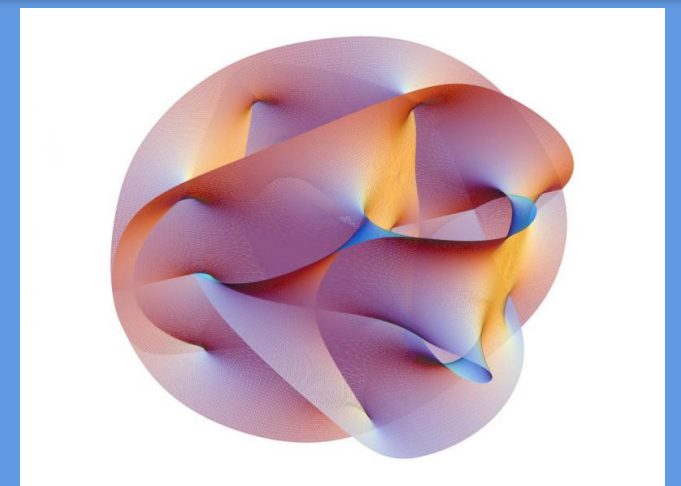
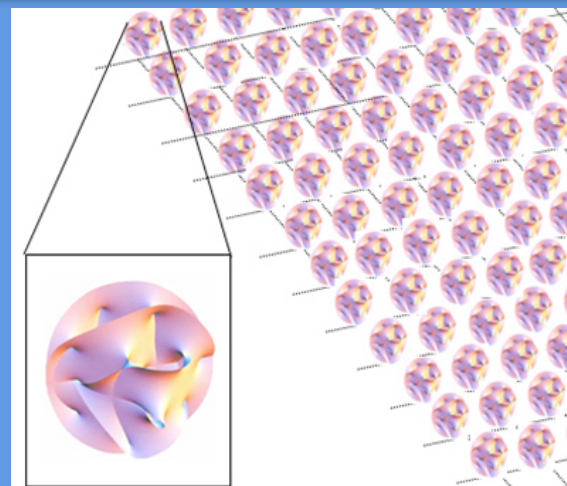
Kaluza et Klein cherchaient des « équations de champs » : succès mitigé...

Néanmoins, avec leur modèle on peut obtenir un très joli théorème :

Théorème : Une géodésique de genre temps de l'espace total (dim 5) se projette sur la base, représentant l'espace-temps classique de dim 4 exactement sur la trajectoire d'une particule chargée dans un champs de gravitation ET dans un champ électromagnétique dont les caractéristique dépendent de cette petite 5ème dimension...

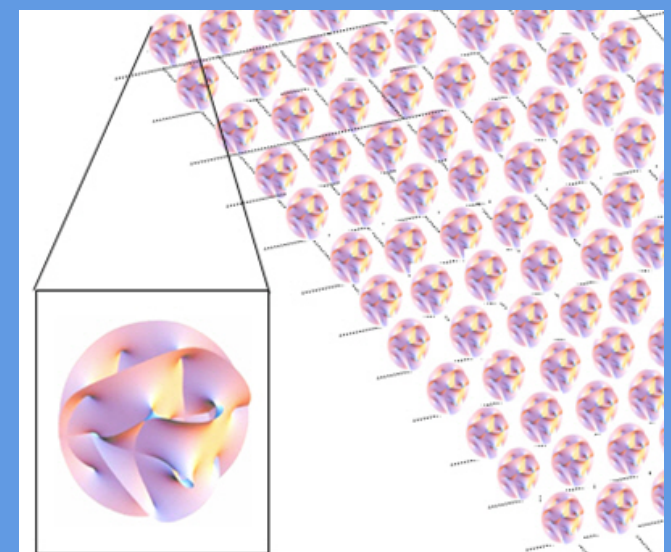
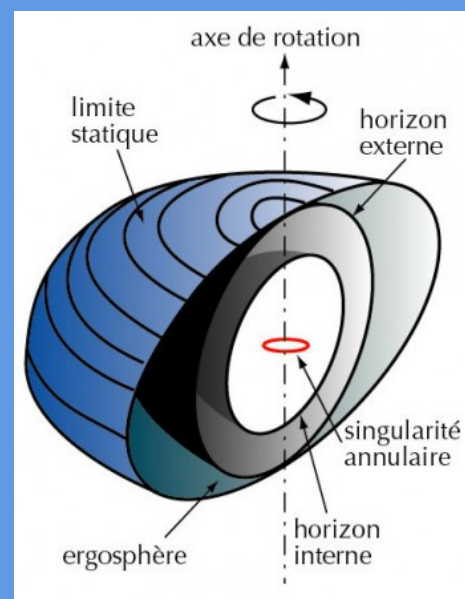
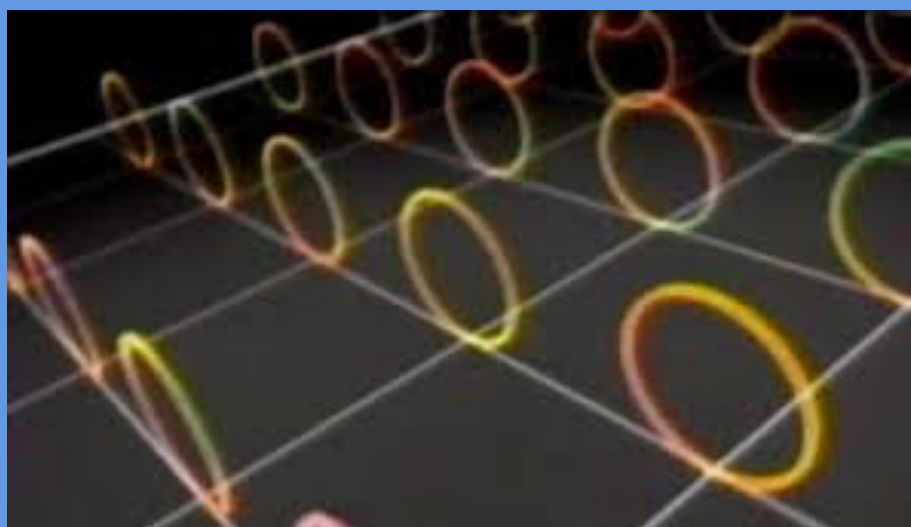
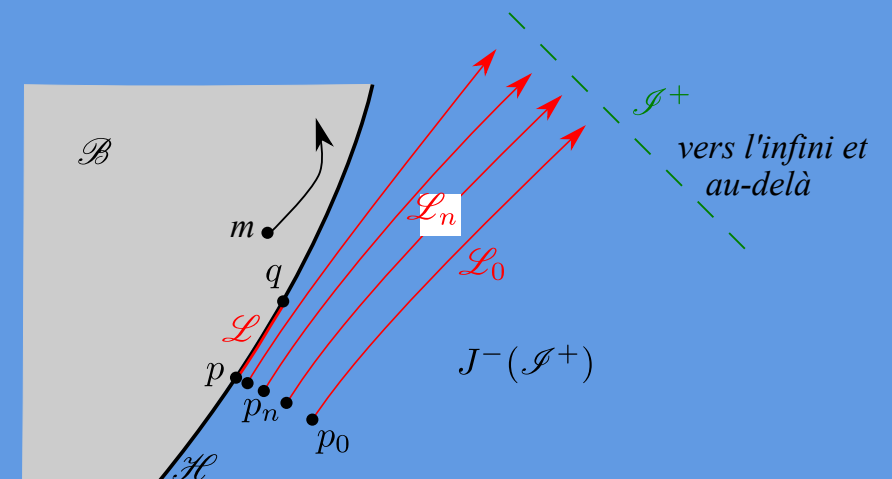
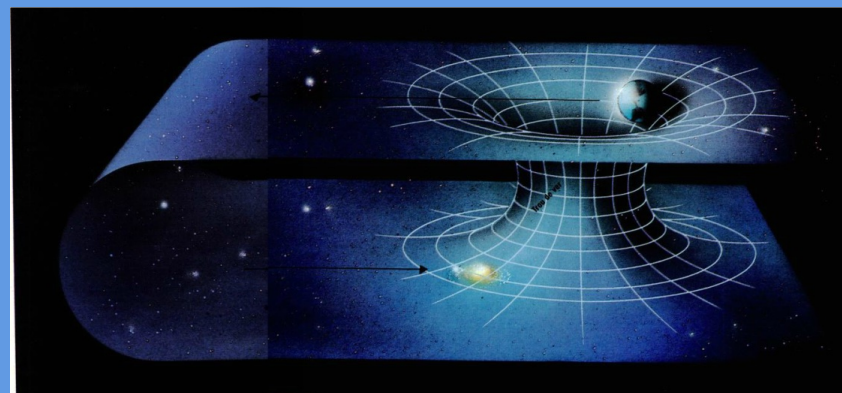
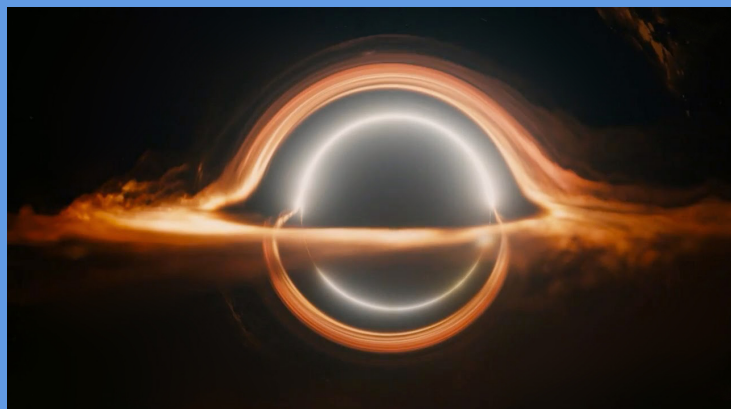
Tombée dans l'oubli, cette théorie de Kaluza-Klein ressurgit dans les années 1980 pour donner naissance à la **théorie des cordes**, et ses 11 dimensions !

Elle pose de formidables problèmes dus à sa géométrie très sophistiquée (variétés de Kalabi-Yau) :



Une Théorie Géométrique !!

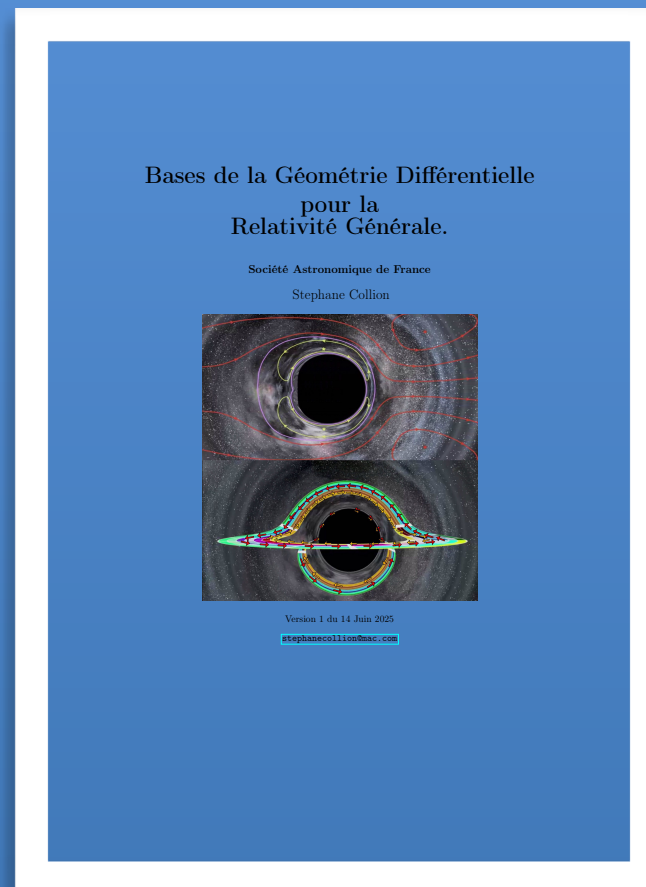
- Aujourd'hui, en 2024, les postulats géométriques de la relativité générale ne sont quasiment pas contestés.
- La relativité restreinte étant solidement établie, et une variété Lorentzienne offrant « localement » l'espace plat de Minkowski, ce modèle géométrique semble très solide.
- Tout au plus sa géométrie peut être enrichie : structure fibrée, théorie de Kaluza-Klein...
- Seul le postulat physique, l'équation d'Einstein, est débattu et fait l'objet de tentatives de modifications (théories tenseur-scalaires, ...).
- **Mais Einstein résiste furieusement bien !**



Pour approfondir :



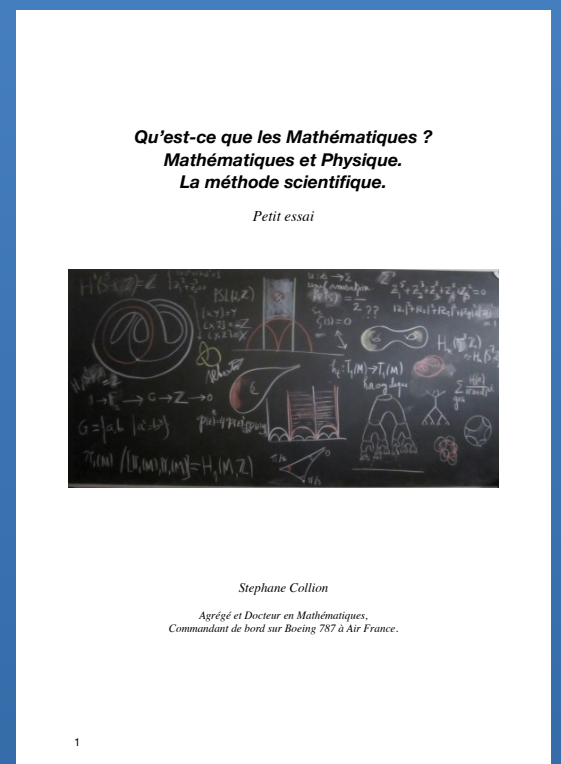
Un livre sympa, pleins de dessins.
Cet exposé en est tiré...



Les mathématiques de
cet exposé :
cours niveau M1/M2

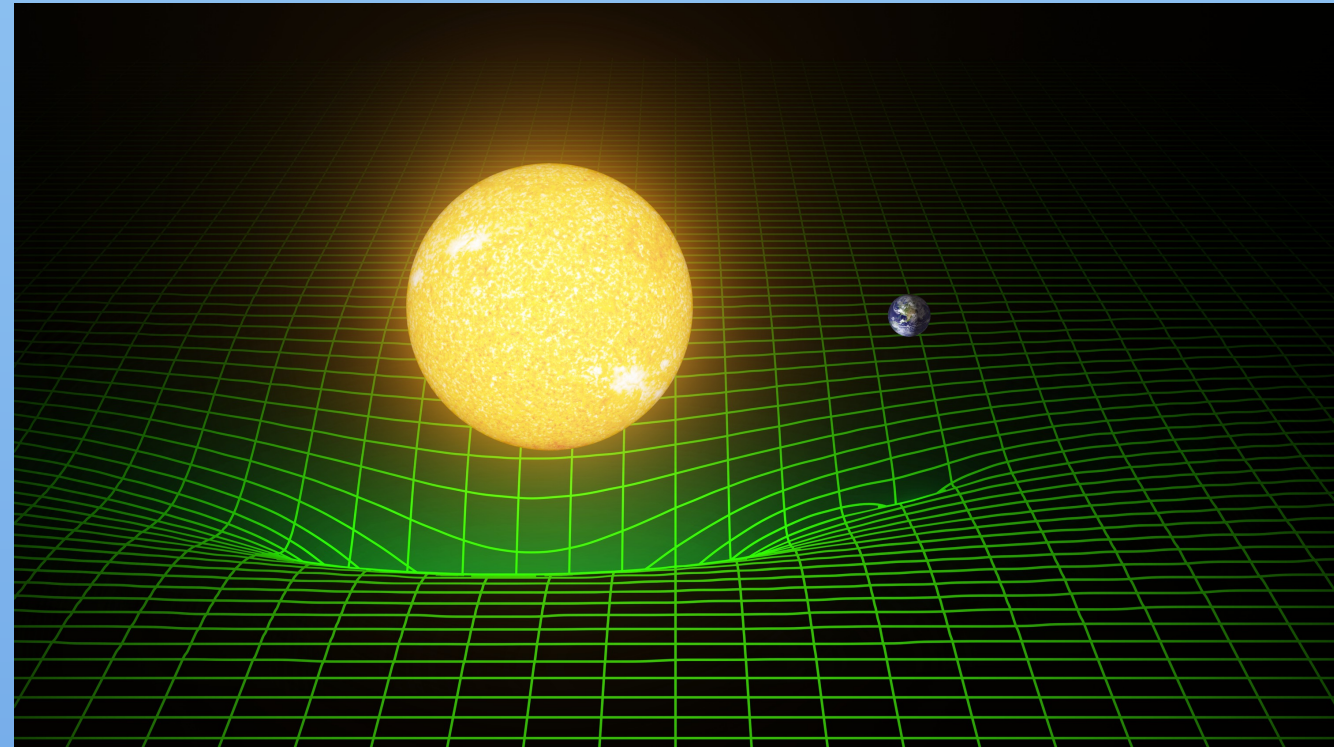
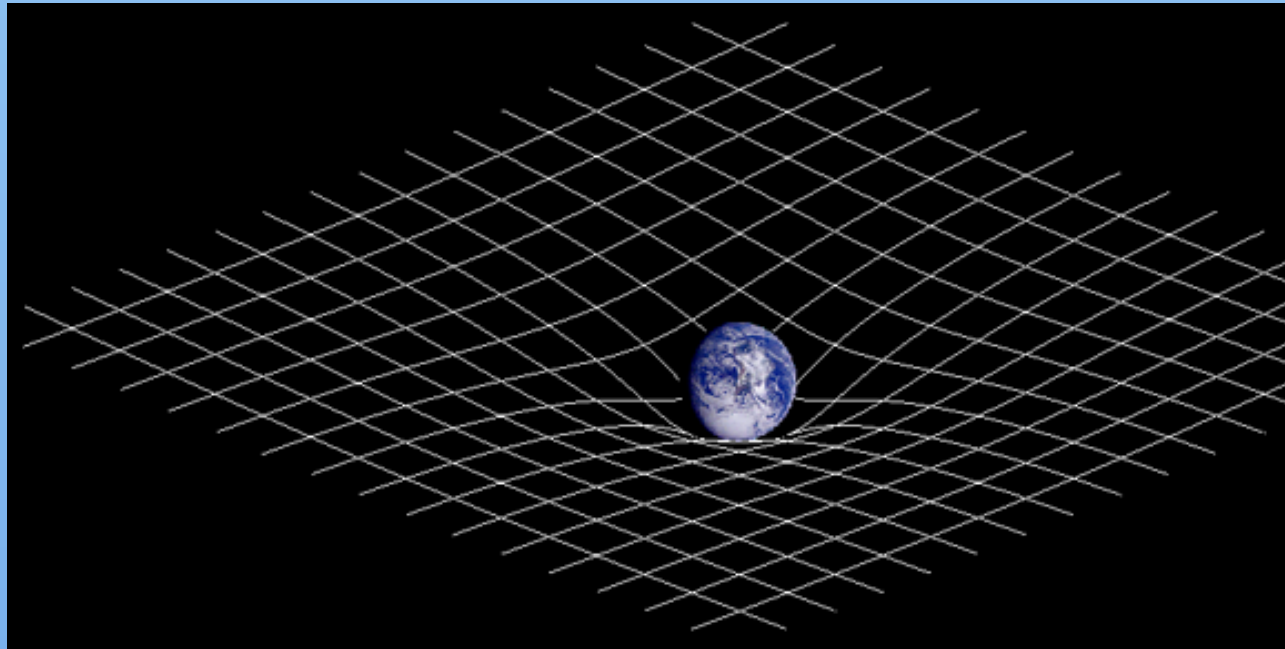
Petite rêverie sur les
mathématiques, ce qu'elles sont,
leurs rapports à la physique, et
leur enseignement...

Disponibles sur demande à
stephanecollion@mac.com



Visualiser l'espace-temps courbe.

Quelques remarques sur l'illustration souvent donnée de l'espace-temps courbe :

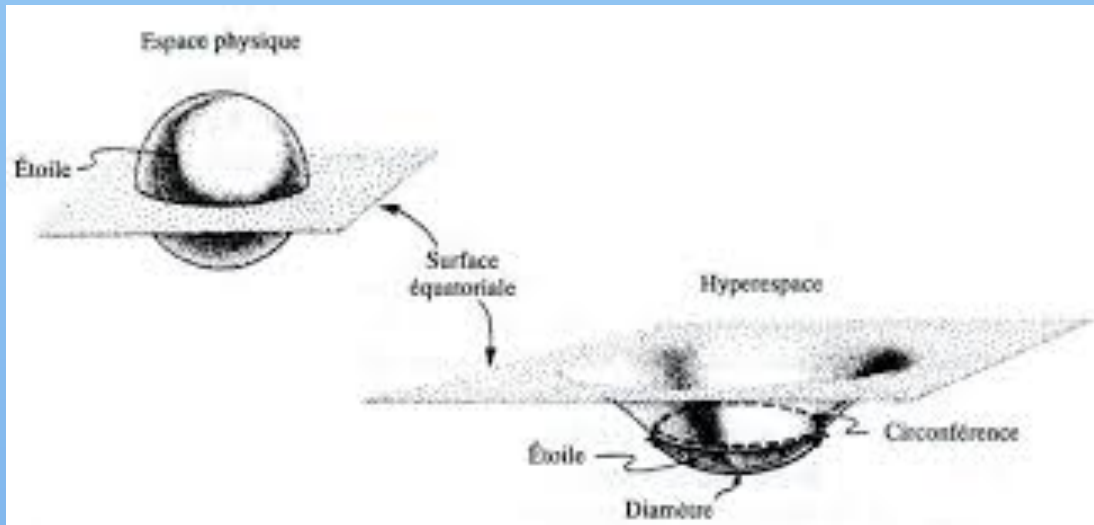


Ces figures, très répandues, cachent des points très importants :

- La « déformation » du temps n'apparaît pas : i.e l'influence de la courbure sur les mesures de temps propre.
- L'espace-temps ne se déforme pas dans un "espace" plus grand, il se déforme "en lui-même".
- Ce n'est pas le "poids" de la boule qui déforme l'espace-temps, c'est sa "présence".
- Il faut comprendre que la boule, la planète ou l'étoile qu'elle représente, fait partie de l'espace-temps.

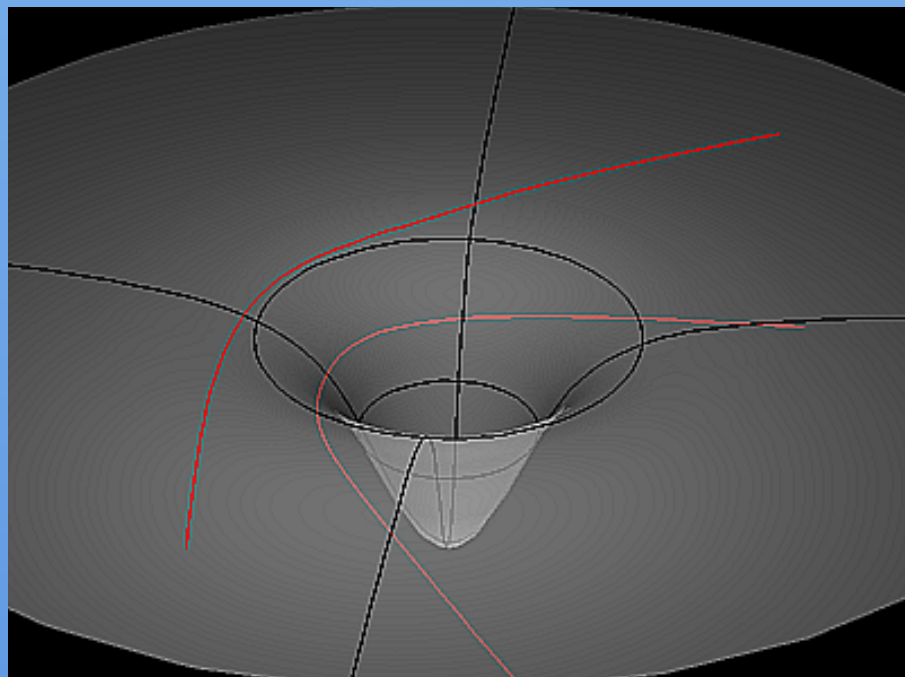
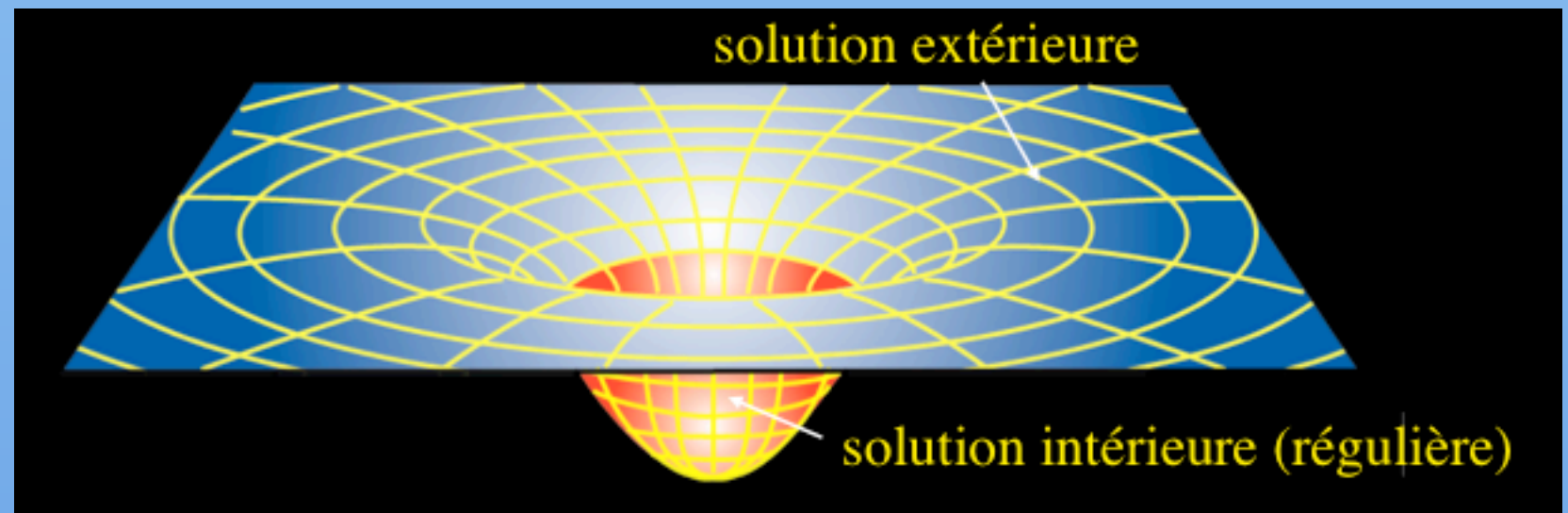
Les schémas faisant apparaître les cônes de lumières sont les plus pertinents.

Les diagrammes de plongement.

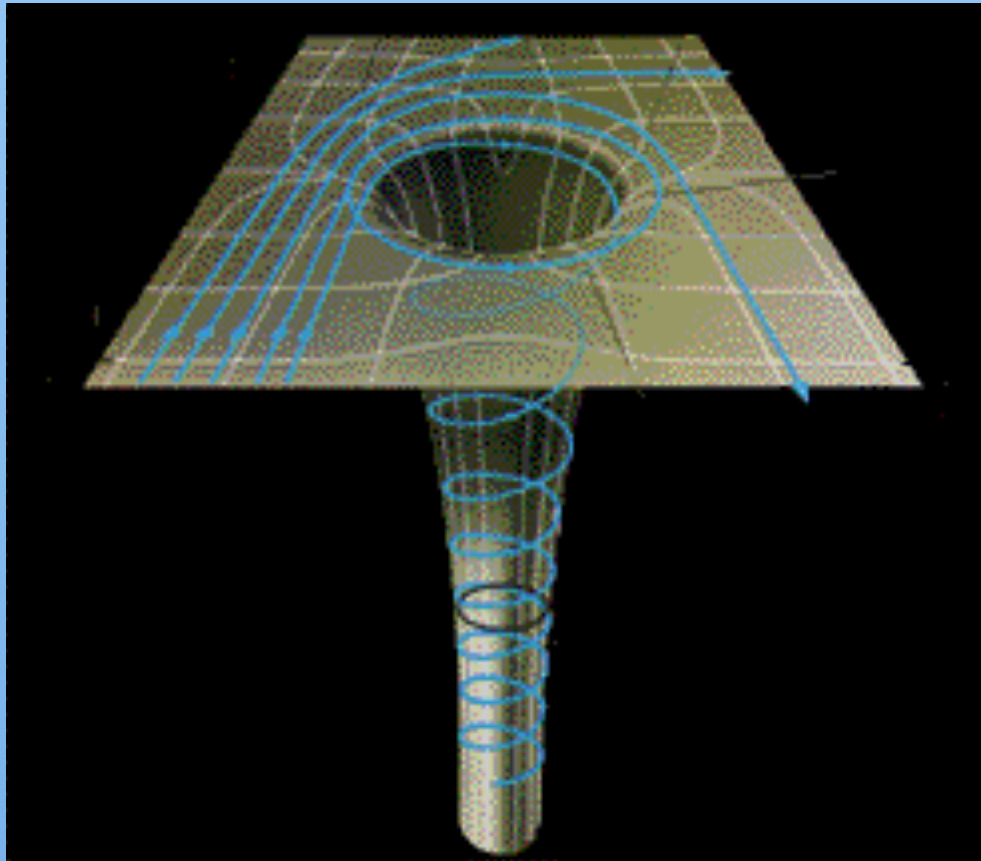


On considère une masse parfaitement sphérique, modélisant une étoile ou une planète, et qui ne varie pas au cours du temps. L'espace-temps est alors dit "statique", ce qui signifie que sa géométrie spatiale reste identique à elle-même à chaque instant. On aimerait comprendre la géométrie d'espace-temps, à un instant fixé, d'une "tranche" équatoriale, bidimensionnelle, passant par le centre de la sphère. La géométrie de notre espace-temps étant à symétrie sphérique et statique on ne perd alors aucune information. L'idée est alors de visualiser cette tranche spatiale de dimension 2 en la « plongeant » dans un espace euclidien à trois dimension fictif, sans aucune réalité physique, servant uniquement à "encadrer" l'espace-temps sectionné.

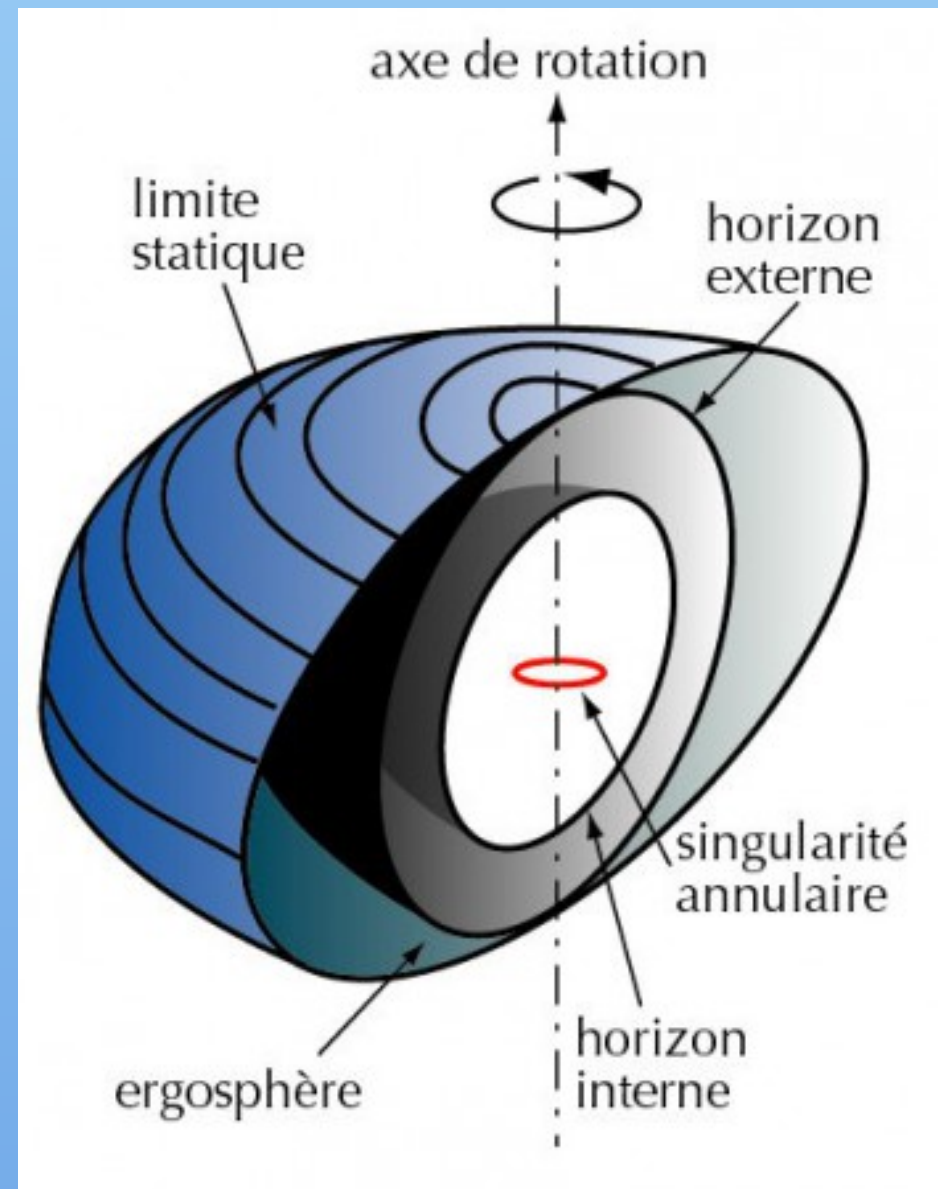
On retrouve une forme qui évoque celle d'un tissu élastique déformé. Mais insistons sur le fait qu'il s'agit de la représentation de la géométrie d'un "instantané" de la tranche d'espace-temps passant par le centre de la sphère, visualisé dans un espace à trois dimension sans aucune réalité physique. Elle fait apparaître une région extérieure s'étendant à l'infini, et une région intérieure à l'étoile.



On peut alors faire figurer sur cette surface l'allure qu'aurait la projection des trajectoires géodésiques de divers objets confinés à ce plan équatorial, notant encore une fois que la tranche est un instantané, alors que les trajectoire marquent évidemment des positions successives au cours du temps.



En bleu, les trajectoires de quelques photons, sur un diagramme de plongement d'un trou noir. C'est le fait que certains d'entre eux fassent des quarts de tours, ou parfois plusieurs tours, avant de partir en direction de l'observateur qui explique la déformation des images des objets situés en "arrière-plan" du trou noir. Malgré les limitations de ce type de schéma évoquées au chapitre précédent, celui-ci suggère néanmoins efficacement le fait que le rayon du trou noir, distance du bord à un hypothétique centre, est infini.



La structure complexe d'un trou noir de Kerr fait apparaître des régions aux propriétés physiques distinctes. L'horizon des événements est la deuxième surface en partant de l'extérieur. La surface externe, appelée ergosphère marque la limite à partir de laquelle plus aucun objet, quelle que soit son accélération, ne peut rester immobile par rapport à un observateur lointain ; tout l'espace-temps est "entraîné en rotation" par le trou noir. Il y a un deuxième horizon, interne, l'horizon de Cauchy ; il peut également exister une deuxième ergosphère intérieure. On distingue, en rouge, la singularité annulaire.

Qu'est-ce que les mathématiques :

Les Mathématiques et la Physique sont sans doute deux aspects d'un même plaisir intellectuel, une compréhension de l'univers qui nous entoure.

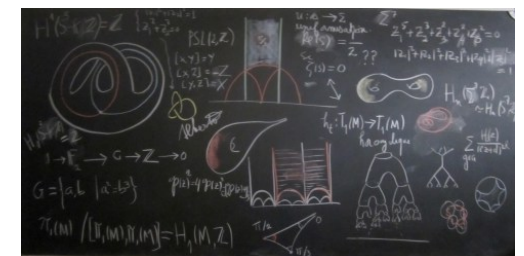
La physique tente de modéliser la nature pour, d'une part, chercher à en comprendre le fonctionnement, et, d'autre, part prédire son évolution ou du moins le résultat d'expériences qui portent sur elle. Il se trouve que c'est à travers les mathématiques que la Physique s'exprime le mieux, à travers elles que ses modèles sont le plus efficaces.

De son côté, les Mathématiques cherchent à extraire des structures communes à divers aspects de la nature, comme les nombres qui servent aussi bien à compter les étoiles dans le ciel que les moutons d'un troupeau, ou les figures géométriques qui peuvent décrire aussi bien la trajectoire des planètes autour du soleil que la forme des champs que veulent se partager des paysans. Autrement dit, les Mathématiques servent à simplifier le réel. (Ce à quoi certains pourraient répondre que c'est raté !) Puis, une fois définies ces structures, les Mathématiques s'amuse à les faire vivre puis à les questionner pour mieux les comprendre, quitte à s'éloigner de leur origine naturelle. Les mathématiques ont ainsi leur logique propre, et une immense partie des mathématiques se développe sans aucun lien avec la physique ni aucune volonté d'application concrète.

Mais il est fascinant de constater qu'après avoir évolué dans les mains (ou plutôt la tête!) des mathématiciens, des structures et développements purement mathématiques peuvent revenir vers les physiciens pour leur offrir de nouveaux concepts avec lesquels ils pourront modéliser de nouveau la nature de manière plus précise et sophistiquée. Puis cet échange entre Mathématiques et Physique recommence, à un niveau toujours plus élevé, à partir de questionnements de la physique, ou parfois, d'ailleurs, des mathématiques.

**Qu'est-ce que les Mathématiques ?
Mathématiques et Physique.
La méthode scientifique.**

Petit essai



Stephane Collion

*Agrégé et Docteur en Mathématiques,
Commandant de bord sur Boeing 787 à Air France.*

1

*Disponible sur demande à
stephane.collion@wanadoo.fr*

Mathématiques et Physique.

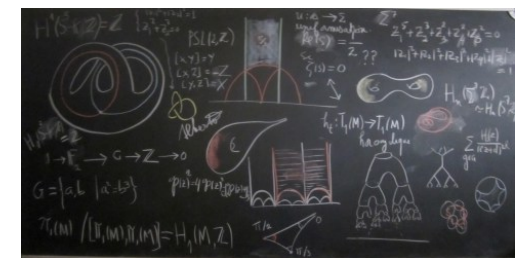
Une théorie mathématique solide est bâtie sur un système d'axiomes cohérent, et sur des théorèmes rigoureusement démontrés selon la démarche propre aux mathématiques. Elle peut alors engendrer de nouveaux théorèmes importants et de grande portée pour les mathématiques elle-mêmes. C'est le cas de la géométrie que nous avons présenté. Les physiciens peuvent ensuite utiliser ces théories mathématiques pour élaborer des modèles décrivant la nature, et en déduire des conséquences ou des prédictions grâce aux théorèmes qu'elles fournissent. Mais seule la confrontation à l'expérience et à l'observation permettra de justifier a posteriori ces modèles. Les mathématiques peuvent être parfaitement justes, mais la physique qu'on en tire peut, elle, être complètement fausse !

Notre but dans cet exposé était donc de présenter les modèles géométriques, mathématiques, de la relativité restreinte et générale. Nous avons vu que l'on peut déduire mathématiquement de ces modèles des phénomènes spectaculaires concernant les mesures du temps ou le mouvement de la lumière, comme le paradoxe des jumeaux, les trous noirs, le big-bang.

Depuis 100 ans, toutes les expériences réalisées et toutes les observations effectuées semblent confirmer la justesse du modèle choisi par Einstein entre 1905 et 1916 pour décrire l'espace-temps et la gravitation

**Qu'est-ce que les Mathématiques ?
Mathématiques et Physique.
La méthode scientifique.**

Petit essai



Stephane Collion

*Agrégé et Docteur en Mathématiques,
Commandant de bord sur Boeing 787 à Air France.*

1

*Disponible sur demande à
stephane.collion@wanadoo.fr*

L'espace-temps et la gravitation : La relativité générale. (pour lecteurs exigeants...)

Approche mathématique (bis) : *une géométrie générale !*

On veut garder les éléments suivant de la géométrie de la relativité restreinte :

- 1/ Un espace géométrique de dimension 4 (ce qui signifie qu'autour d'un point fixé, on repère les autres à l'aide de 4 coordonnées). On doit pouvoir y donner un sens à l'expression « à petite échelle, ça ressemble à l'espace euclidien de la relativité restreinte ».
- 2/ Disposer du calcul différentiel : rappelons que le calcul différentiel, qui traite de la manipulation des dérivées et des intégrales des fonctions, a été inventé en même temps que la mécanique Newtonienne. Ainsi la vitesse, c'est la dérivée de la fonction position, et l'accélération c'est la dérivée de la vitesse. Bref, on veut pouvoir calculer des vitesses, des accélérations...
- 3/ Les objets mathématiques définis dans cet espace géométrique (qui correspondront aux objets et postulats physiques retenus) doivent être indépendants d'un choix particulier de coordonnées, ce qui mathématiquement s'exprime sous la formule barbare « d'invariance par difféomorphisme ».
- 4/ En chaque point, la possibilité de définir un cône de lumière.
- 5/ Pouvoir définir la (pseudo-) longueur des courbes tracées dans cet espace géométrique, et pouvoir caractériser celles d'entre elles qui ont une (pseudo-) longueur extrémale (minimum, maximum) ou nulle ; et pouvoir caractériser les courbes d'accélération nulle.

La seule notion qu'on abandonne, c'est la notion de droite : d'où un espace géométrique... courbe !

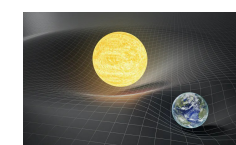
Ce qui est extraordinaire, c'est qu'un tel espace géométrique, répondant à ces cinq exigences, avait été inventé 60 ans avant les travaux d'Einstein (1907-1915), par le mathématicien Bernhard Riemann : on appelle aujourd'hui cet espace géométrique ***une variété Riemannienne***. Néanmoins, en 1910, les idées de Riemann étaient encore en développement, accessibles essentiellement dans des articles de recherche, et de plus, évidemment, les cônes de lumière n'y apparaissaient pas. Il a donc fallu le véritable génie d'Einstein, brillant mathématicien contrairement à une légende tenace, pour y trouver exactement le cadre mathématique qu'il lui fallait, et le généraliser pour y incorporer les cônes de lumière.

D'où vient que l'espace-temps est courbe ?

stephane.collion@wanadoo.fr
10-03-2023 (commentaires bienvenus).

Introduction :

Lorsqu'on cherche à expliquer pourquoi on modélise la gravitation à l'aide d'un « espace-temps » courbe, on utilise souvent une approche historique, en citant quelques idées clés et célèbres d'Einstein.



Pourtant, plus de cent ans après « l'invention » par Einstein de l'espace-temps courbe, une autre approche devrait être proposée, plus moderne et liée à la *géométrie différentielle*, branche des mathématiques unifiant analyse et géométrie. En effet, il est naturel dans l'évolution de sciences de revoir les fondements de certaines théories en profitant du recul acquis par leur mise à l'épreuve et leur extension due à l'apport croisé de nombreux regards de chercheurs et d'utilisateurs.

Une présentation historique est évidemment intéressante, surtout si elle met en évidence les interrogations et la démarche ayant mené à la découverte. Mais elle n'est pas forcément la plus pédagogique, car évidemment le chemin

d'un défricheur, tel qu'en particulier Einstein, est fait d'essais et d'erreurs, de tentatives variées et abandonnées. Il me semble trop court de toujours citer une des célèbres expériences de pensées d'Einstein, s'imaginant chuter dans un ascenseur, comme si elle lui avait suffi, en une journée, à poser les fondements de toute sa théorie, alors qu'elle n'était que le point de départ, ou même seulement l'un des éléments, d'un long cheminement intellectuel qui l'occupa pendant plus de sept ans.

Le recul acquis en 100 ans d'utilisation de la relativité permet donc de proposer une autre approche basée sur une vision modernisée de la relativité et des mathématiques. Puisqu'il s'agit d'un modèle mathématique d'un phénomène physique, cette approche doit se fonder sur des exigences, des « principes », issus de l'observation ou, ce qui était le cas d'Einstein dans son cheminement de la relativité restreinte à la relativité générale, de la recherche d'une cohérence avec d'autres théories, qu'il convient de traduire en termes mathématiques.

En tant que mathématicien, et défendant la relation fusionnelle qu'entretiennent mathématiques et physique, je souhaite mettre en évidence que les mathématiques offrent un chemin « naturel » qui mène de la relativité restreinte à la relativité générale. Il en résultera le choix d'un modèle basé sur un espace géométrique différent de celui de la physique Newtonienne : c'est selon moi le point fondamental, qui sera la conséquence des autres exigences.

Je commencerais néanmoins par une approche à mi-chemin entre heuristique et démarche physique, pour montrer justement qu'elle n'est pas plus simple que l'approche mathématiques. C'est bien sûr plus simple sur un plan formel, car il faut connaître des maths un peu sophistiquées pour faire les choses rigoureusement ; mais in fine, un physicien devra arriver aux mêmes mathématiques pour finaliser son modèle. Nous montrerons donc que les maths simplifient la démarche, et sont, plus qu'une aide, une source d'inspiration pour la physique.

Ce petit texte, écrit en réponse à des questions et à des réflexions suggérées par une émission de radio, n'est qu'une extension de l'introduction du chapitre 4 de mon bouquin « voyage dans les mathématiques de l'espace-temps » où l'on trouvera tous les détails des choses mentionnées ici, et bien plus...

Publicité :



Disponible sur demande à
stephane.collion@wanadoo.fr